一、极限的四则运算法则

定理1 设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 则

$$(1)\ \lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;$$

$$(2)\ \lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$$

$$(3)\ \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},\ (B\neq 0).$$

注: 法则(1)、(2)均可推广到有限个函数的情形.

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 C 为常数, 则

$$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x).$$

即:常数因子可以提到极限记号外面.

结束放映

推论2 如果 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

注：上述定理给求极限带来很大方便，但应注意，运用该定理的前提是被运算的各个变量的极限必须存在，并且，在除法运算中，还要求分母的极限不为零。

结束放映

例1 求 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-3x+5)$.

解 $$\lim_{x\to2}(x^2-3x+5)=\lim_{x\to2}x^2-\lim_{x\to2}3x+\lim_{x\to2}5$$

$$=(\lim_{x\to2}x)^2-3\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}5$$

$$=2^2-3\cdot2+5=3$$

注：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=f(x_0).$$

结束放映

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9}{5x^2-7x-2}$.

解　$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-9}{5x^2-7x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-9)}{\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-7x-2)}$$

$$=\frac{2\cdot 3^2-9}{5\cdot 3^2-7\cdot 3-2}=\frac{9}{22}.$$

注：设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，且 $Q(x_0)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

当 $Q(x_0)=0$ 时，则商的法则不能应用.

结束放映

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时, 分子和分母的极限都是零. 此时应先约去不为零的无穷小因子 $x-1$ 后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$ 消去零因子法

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

结束放映

例4 计算 $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解 当 $x\to4$ 时,

$$(\sqrt{x+5}-3)\to0,$$

不能直接使用商的极限运算法则.

但可采用分母有理化消去分母中趋向于零的因子.

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x+5}+3)$$

$$=\lim_{x\to4}\sqrt{x+5}+3=6.$$

结束放映

定理2(复合函数的极限运算法则)

设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，若

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\quad \lim_{u\to u_0} f(u)=A,$$

且在 x_0 的某去心邻域内有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

注:定理2表明:若函数 $f(u)$ 和 $g(x)$ 满足该定理的条件，则作代换 $u=g(x)$，可把求 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]$ 化为求 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$，其中 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

结束放映

例5 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x.$

解 令 $u=2x$, 则函数 $y=\sin 2x$ 可视为由 $y=\sin u$, $u=2x$ 构成的复合函数.

因为 $x\to 0$, $u=2x\to 0$, 且 $u\to 0$ 时 $\sin u\to 0$,

所以

$$\lim_{x\to 0}\sin 2x=\lim_{u\to 0}\sin u=0.$$

结束放映

例6 计算 $\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $u=\frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \quad 且 \quad \lim_{u\to 0} 2^u = 1,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to 0} 2^u = 1.$$

结束放映