



一、极限的四则运算法则

定理1 设 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, (B \neq 0).$$

注: 法则(1)、(2)均可推广到有限个函数的情形.

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 C 为常数, 则

$$\lim [Cf(x)] = C \lim f(x).$$

即: 常数因子可以提到极限记号外面.



推论2 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

注: 上述定理给求极限带来很大方便, 但应注意, 运用该定理的前提是被运算的各个变量的极限必须存在, 并且, 在除法运算中, 还要求分母的极限不为零.

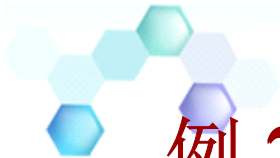


例1 求 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \end{aligned}$$

注: 设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a_0 (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^n + a_1 (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$



例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9}{5x^2 - 7x - 2}$.

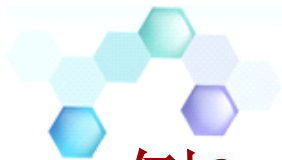
解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9}{5x^2 - 7x - 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (5x^2 - 7x - 2)} \\ &= \frac{2 \cdot 3^2 - 9}{5 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 - 2} = \frac{9}{22}. \end{aligned}$$

注: 设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

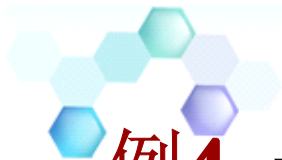
当 $Q(x_0) = 0$ 时, 则商的法则不能应用.



例3 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

解 $x \rightarrow 1$ 时, 分子和分母的极限都是零. 此时应先约去不为零的无穷小因子 $x-1$ 后再求极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \quad \text{消去零因子法} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



例4 计算 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解 当 $x \rightarrow 4$ 时,

$$(\sqrt{x+5}-3) \rightarrow 0,$$

不能直接使用商的极限运算法则.

但可采用分母有理化消去分母中趋向于零的因子.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x+5}+3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x+5}+3 = 6. \end{aligned}$$

定理2(复合函数的极限运算法则)

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成, 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \quad \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A,$$

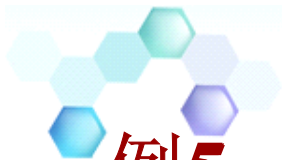
且在 x_0 的某去心邻域内有 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

注:定理2表明:若函数 $f(u)$ 和 $g(x)$ 满足该定理的条件,

则作代换 $u = g(x)$, 可把求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$ 化为求

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u), \quad \text{其中 } u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$



例5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x$.

解 令 $u = 2x$, 则函数 $y = \sin 2x$ 可视为由 $y = \sin u$,
 $u = 2x$ 构成的复合函数.

因为 $x \rightarrow 0$, $u = 2x \rightarrow 0$, 且 $u \rightarrow 0$ 时 $\sin u \rightarrow 0$,

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = \lim_{u \rightarrow 0} \sin u = 0.$$



例6 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $u = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{且} \quad \lim_{u \rightarrow 0} 2^u = 1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} 2^u = 1.$$