一、导数的定义

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个领域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx(点 $x_0+\Delta x$ 仍在该领域内)时，相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；若 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处

结束放映

的导数，记为

$$y'\big|_{x=x_0},\ f'(x_0),\ \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0},$$

即

$$y'\big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数定义的其它形式:

令 $h=\Delta x,\quad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$

令 $x=x_0+\Delta x,\ f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$

结束放映

几点说明

(1) 点导数是因变量在点 x_0 处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度;

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导;

(3) 如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，就称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导;

结束放映

(4) $\forall x \in I$,都对应着$f(x)$的一个确定的导数值,这个函数叫做原来函数 $f(x)$的导函数,记作

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx}.$$

注意: (i) $f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$;

(ii) 导函数(瞬时变化率)是函数平均变化率的逼近函数.

二、利用定义求导数

1. 按定义求导的基本步骤:

(1) 求函数的增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

(2) 求两增量的比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

结束放映

例 1　求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$.

解　当 x 由1变到 $1+\Delta x$ 时, 函数相应的增量为

$$\Delta y=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x,$$

所以

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$$

结束放映

例2 求函数 $f(x)=C$（C为常数）的导数.

解
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0,$$

即 $(C)'=0.$

例3 设函数 $f(x)=\sin x$, 求 $(\sin x)'$及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解 $$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x,$$

即 $$(\sin x)'=\cos x.$$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

结束放映

例4　求函数 $y=x^n$(n为正整数)的导数.

解　$$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}]$$

$$=nx^{n-1},$$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}$. 更一般地 $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}(\mu\in R)$.

例如, $$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

结束放映

例5 求函数 $f(x)=a^x(a>0, a\neq 1)$的导数.

解

$$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{n+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a,$$

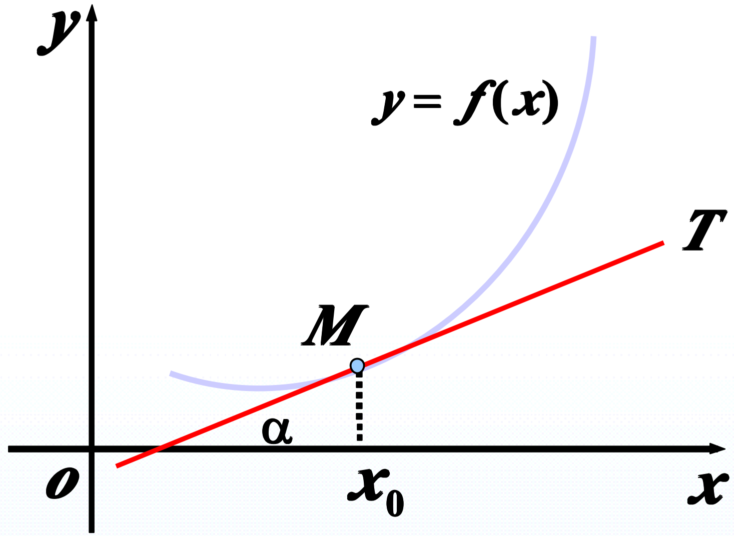
即 $(a^x)'=a^x\ln a,\qquad (e^x)'=e^x.$

结束放映

三、导数的几何意义

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率,即

$f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

例6 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率，并写出在该点处的 切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义， 得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{x}\right)'\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为 $y-2=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$,

即 $4x+y-4=0.$

法线方程为 $y-2=\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$,

即 $2x-8y+15=0.$

结束放映

四、可导与连续的关系

定理　如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则它在点 x_0 处连续.

证　因为函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，所以

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

于是　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha, \alpha \to 0$　(当 $\Delta x \to 0$),

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x] = 0,$$

故函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.　证毕.

结束放映

注: 该定理的逆命题不成立. 即函数在某点连续, 但在该点不一定可导(参见后面例子).

结束放映