一、和、差、积、商的求导法则

定理 1　若函数 $u(x),v(x)$ 在点 x 处可导, 则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点 x 处也可导, 并且

(1)　$[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$;

(2)　$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x)\pm u(x)v'(x)$;

(3)　$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x)\neq 0)$.

注：法则(1)、(2)均可推广到有限个函数运算的情形. 特别地，若在法则(2)中, 令 $v(x)=C$ (C 为常数)，则有

$$[Cu(x)]' = Cu'(x).$$

结束放映

例 1 求 $y = \tan x$ 的导数.

解 $$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x},$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

即 $(\tan x)' = \sec^2 x.$

同理可得 $(\cot x)' = -\csc^2 x.$

结束放映

例2　求 $y=\sec x$ 的导数.

解　$y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

同理可得　$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

结束放映

例3 求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数.

解 因为 $y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$，所以

$$
\begin{aligned}
y' &= (2\sin x)' \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (\cos x)' \cdot \ln x \\
&\qquad + 2\sin x \cdot \cos x \cdot (\ln x)' \\
&= 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x \\
&\qquad + 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x} \\
&= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.
\end{aligned}
$$

注： 此题如果利用后面讲到的复合函数的求导法则则计算过程更为简单．那时，不必按本题那样拆开为两项来计算．

结束放映

例4 求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数.

解 $y' = (x^3)' - (2x^2)' + (\sin x)'$

$= 3x^2 - 4x + \cos x.$

例5 求 $y = 2\sqrt{x}\sin x$ 的导数.

解 $y' = (2\sqrt{x}\sin x)' = 2(\sqrt{x}\sin x)'$

$= 2[(\sqrt{x})'\sin x)' + \sqrt{x}(\sin x)']$

$= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x + 2\sqrt{x}\cos x.$

结束放映

二、反函数的导数

定理 2 若函数 $x=\varphi(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq 0$, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在对应区间 I_x 内也可导, 且有

$$[f(x)]'=\frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

即：反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

结束放映

例6 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $\because\ x=\sin y$ 在 $I_y=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导,

且 $$(\sin y)'=\cos y>0,$$

$\therefore$ 在对应区间 $I_x=(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得 $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

结束放映

例7 求函数 $y=\log_a x$ 的导数.

解 $\because x=a^y$ 在 $I_y=(-\infty,+\infty)$ 内单调、可导, 且

$$(a^y)'=a^y\ln a\neq 0,$$

$\therefore$ 在对应区间 $I_x=(0,+\infty)$ 内有

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

结束放映

基本初等函数的求导公式

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu - 1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

结束放映

基本初等函数的求导公式

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

结束放映

三、复合函数的求导法则

定理 3 若函数 $u=g(x)$在点 x可导, 而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$可导, 则复合函数 $y=f[g(x)]$在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

链式法则

注: 复合求导法则可推广到多个中间变量的情形.

例如, 设 $y=f(u), u=\varphi(v), v=\psi(x)$, 则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

结束放映

例8 求函数 $y=(x^2+1)^{10}$的导数.

解 设 $y=u^{10}, u=x^2+1$. 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=10u^9\cdot 2x$$

$$=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

注: 复合函数求导既是重点又是难点. 在求复合函数$y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数时, 要从外层, 逐层推进. 先求 f 对大括号内的变量 u 的导数 $(u=\varphi[\psi(x)])$, 再求 φ 对中括号内的变量 v 的导数 $(v=\psi(x))$, 最后求 ψ 对小括号内的变量 x 的导数.

结束放映

例 9　求函数 $y=(x+\sin^2 x)^3$ 的导数.

解　$y'=[(x+\sin^2 x)^3]'$

$=3(x+\sin^2 x)^2(x+\sin^2 x)'$

$=3(x+\sin^2 x)^2[1+2\sin x\cdot(\sin x)']$

$=3(x+\sin^2 x)^2(1+\sin 2x).$

结束放映

例10 求函数 $y = e^{\sin^2(1-x)}$ 的导数.

解一 设中间变量，令

$$y = e^u, u = v^2, v = \sin w, w = 1 - x.$$

于是 $$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_w \cdot w'_x$$

$$= (e^u)' \cdot (v^2)' \cdot (\sin w)' \cdot (1 - x)'$$

$$= e^u \cdot 2v \cdot \cos w \cdot (-1)$$

$$= -e^{\sin^2(1-x)} \cdot 2\sin(1-x)\cos(1-x)$$

$$= -\sin 2(1-x) \cdot e^{\sin^2(1-x)}.$$

结束放映

例11 求函数 $y=e^{\sin^2(1-x)}$ 的导数.

解二 不设中间变量.

$$y'=e^{\sin^2(1-x)}\cdot 2\sin(1-x)\cdot\cos(1-x)\cdot(-1)$$

$$=-\sin 2(1-x)\cdot e^{\sin^2(1-x)}.$$

结束放映

例 12 求函数 $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$ 的导数.

解 $\because y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{3}\ln(x-2)$,

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)'$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}$$

$$=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}.$$

例13 求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}(a>0)$ 的导数.

解 $y'=\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)'+\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)'$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}(\sqrt{a^2-x^2})'+\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

结束放映

例14 求导数 $y=\log_x e+x^{1/x}$.

解 $\because \log_x e=\dfrac{\ln e}{\ln x}=\dfrac{1}{\ln x}$.

$\therefore y'=(\log_x e)'+(x^{1/x})'$

$$=\left(\frac{1}{\ln x}\right)'+\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'$$

$$=-\frac{1}{x\ln^2 x}+e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'$$

$$=-\frac{1}{x\ln^2 x}+x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right).$$

结束放映

四、隐函数的导数

定义 由方程$F(x,y)=0$所确定的函数$y=y(x)$称为**隐函数**.形如$y=f(x)$的函数称为**显函数**.

隐函数的显化 $F(x,y)=0 \longrightarrow y=f(x)$

存在问题

(1) 通常隐函数不易显化或不能显化;

(2) 隐函数的求导方法?

隐函数求导法则

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例15 求由方程 $xy+\ln y=1$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数.

解 在题设方程两边同时对自变量 x 求导, 得

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=0$$

所以 $y'=-\dfrac{y^2}{xy+1}$.

结束放映

例16 求由方程 $y\sin x-\cos(x-y)=0$ 所确定的函数的导数.

解 在题设方程两边同时对自变量 x 求导, 得

$$y\cos x+\sin x\cdot\frac{dy}{dx}+\sin(x-y)\cdot\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=0$$

整理得

$$[\sin(x-y)-\sin x]\frac{dy}{dx}=\sin(x-y)+y\cos x$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x-y)+y\cos x}{\sin(x-y)-\sin x}.$$

五、对数求导法

问题的提出

函数 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$, $y=x^{\tan x}$ 的求导问题.

对数求导法　先在方程两边取对数,然后利用隐函数的求导方法求出导数.适用于多个函数相乘和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

设 $f(x)=u(x)^{v(x)}(u(x)>0)$,两边取对数得

$$\ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x),$$

两边对x求导得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}$$

从而

$$\boxed{f'(x)=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\cdot\ln u(x)++\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right].}$$

结束放映

例17 设 $y = x^{\sin x}(x > 0)$, 求 y'.

解 等式两边取对数得

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

两边对 x 求导得

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\therefore \quad y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

结束放映

例18 设$(\cos y)^x = (\sin x)^y$，求y'.

解 在题设等式两边取对数

$$x\ln\cos y = y\ln\sin x$$

等式两边对x求导，得

$$\ln\cos y - x\frac{\sin y}{\cos y}\cdot y' = y'\ln\sin x + y\cdot\frac{\cos x}{\sin x}.$$

解得

$$y' = \frac{\ln\cos y - y\cot x}{x\tan y + \ln\sin x}.$$

结束放映

例19 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}(x>1)$, 求 y'.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x,$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1,$$

$$\therefore\quad y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right].$$

结束放映

六、高阶导数

问题 变速直线运动的加速度.

设$s = f(t)$,则瞬时速度为$v(t) = f'(t)$

$\because$ 加速度α是速度v对时间t的变化率

$\therefore$ $$\alpha(t) = v'(t) = [f'(t)]'.$$

定义 如果函数$f(x)$的导数$f'(x)$在点x处可导,

即 $$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称$(f'(x))'$为函数$f(x)$在点x处的**二阶导数**,记为

结束放映

$$f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2} \text{或} \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

二阶导数的导数称为三阶导数,记为

$$f'''(x), y''', \frac{d^3y}{dx^3}.$$

一般地, $f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为$f(x)$的n阶导数,记为

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^ny}{dx^n} \text{或} \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

注: 二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

例1 设 $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$, 求 y''.

解 $y' = 6x^2 - 6x$, $y'' = 12x - 6$.

例2 设 $y = x^2 \ln x$, 求 $f'''(2)$.

解 $y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)'$

$= 2x \ln x + x$,

$y'' = 2\ln x + 3$, $y''' = \dfrac{2}{x}$,

所以 $f'''(2) = \left.\dfrac{2}{x}\right|_{x=2} = 1$.

结束放映

例3 求指数函数 $y = e^x$ 的n阶导数.

解 $y' = e^x,\ y'' = e^x,\ y''' = e^x,\ y^{(4)} = e^x,$

一般地, 可得 $y^{(n)} = e^x$, 即有 $(e^x)^{(n)} = e^x$.

例4 求对数函数 $y = \ln(1+x)$的 n 阶导数.

解 $y' = \dfrac{1}{1+x},\quad y'' = -\dfrac{1}{(1+x)^2},\quad y''' = -\dfrac{2!}{(1+x)^3},$

$$y^{(4)} = -\frac{3!}{(1+x)^4},\quad \cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\quad (n \geq 1, 0! = 1).$$

结束放映

例5 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

解 $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=(y')'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=(y'')'=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

结束放映

即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

结束放映