引　言

在理论研究和实际应用中,常常会遇到这样的问题:

当自变量 x 有微小变化时,求函数 $y = f(x)$ 的微小改变量

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

这个问题初看起来似乎只要做减法运算就可以了,

然而,对于较复杂的函数 $f(x)$,差值

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$

却是一个更复杂的表达式,不易求出其值.

一种设想是:设法将 Δy 表示成 Δx 的线性函数,

即线性化,从而把复杂问题化为简单问题.微分

就是实现这种线性化的一种数学模型.

一、微分的定义

定义 设函数 $y=f(x)$在某区间内有定义, x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内, 如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\ (A\text{是与}\ \Delta x\ \text{无关的常数}),$$

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0处**可微**,并且称 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$在点 x_0 相应于自变量 Δx 的**微分**, 记作 dy 或 $df(x_0)$, 即 $dy=A\cdot\Delta x$,

结束放映

注：由定义可见：如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分 dy 是自变量 Δx 的线性函数；

(2) 由定义得 $\Delta y = dy + o(\Delta x)$，

我们称 dy 是 Δy 的**线性主部**．上式还表明，以微分 dy 近似代替函数增量 Δy 时，其误差为 $o(\Delta x)$，因此，当 $|\Delta x|$ 很小时，有近似等式

$$\Delta y \approx dy.$$

结束放映

二、可微的条件

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $A=f'(x_0)$.

由关系式: $\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$,

函数 $f(x)$ 的微分可记为: $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$.

若令 $f(x)=x \longrightarrow dx=\Delta x$,

即，自变量的微分等于自变量的改变量.

从而 $dy = f'(x)dx \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$,

结束放映

即，函数的微分与自变量的微分之商等于该函数的导数. 因此,导数也称为"微商".

例1 求函数$y=x^2$当x由1改变到1.01的微分.

解 因为$dy=2xdx$, 由题设条件知

$$x=1, dx=\Delta x=1.01-1=0.01$$

所以

$$dy=2\times 1\times 0.01=0.02.$$

例2 求函数$y=x^3$在$x=2$处的微分;

解 函数$y=x^3$在$x=2$处的微分为

$$dy=(x^3)'\big|_{x=2}dx=12dx.$$

结束放映

三、基本初等函数的微分公式

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

$$d(C) = 0 \qquad d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

结束放映

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$d(arc\cot x) = -\frac{1}{1+x^2} dx.$$

结束放映

三、微分四则运算法则

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

导数的四则运算法则	微分的四则运算法则
$(Cu)' = Cu'$	$d(Cu) = Cdu$
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$d(u \pm v) = du \pm dv$
$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = vdu + udv$
$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

以乘积的微分运算法则为例:

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx$$

$$= u'vdx + uv'dx$$

$$= v(u'dx) + u(v'dx)$$

$$= vdu + udv.$$

结束放映

例3 求函数$y=x^3e^{2x}$的微分.

解 因为

$$y'=(x^3e^{2x})'=3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}=x^2e^{2x}(3+2x)$$

所以 $$dy=y'dx=x^2e^{2x}(3+2x)dx$$

或利用微分形式不变性

$$dy=e^{2x}d(x^3)+x^3d(e^{2x})$$

$$=e^{2x}\cdot 3x^2dx+x^3\cdot 2e^{2x}dx$$

$$=x^2e^{2x}(3+2x)dx.$$

结束放映

例 4 求函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$的微分.

解 因为 $y' = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

所以 $dy = y'dx = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx.$

结束放映

四、复合函数的微分法

设函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy=y_x'dx=f'(u)\varphi'(x)dx.$$

由于 $\varphi'(x)dx=du$，故复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分公式为　$dy=f'(u)du$ 或 $dy=y_u'du$

由此可见，无论 x 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(x)$ 的微分形式总是

$$dy=f'(x)dx$$

微分形式不变形

结束放映

微分形式不变形表明:当变换自变量时(即设u为另一变量的任一可微函数时),微分形式$dy = f'(u)du$保持不变.

例5 设$y = e^{\sin^2 x}$, 求dy.

解 应用微分形式不变性有

$$dy = e^{\sin^2 x} d\sin^2 x$$

$$= e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x d\sin x$$

$$= e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x\cos dx$$

$$= \sin 2x e^{\sin^2 x} dx.$$

例6 设 $y=\sin(2x+1)$, 求 dy.

解 设 $y=\sin u$, $u=2x+1$, 则

$$dy=d(\sin u)$$
$$=\cos u du$$
$$=\cos(2x+1)d(2x+1)$$
$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx$$
$$=2\cos(2x+1)dx.$$

注: 与复合函数求导类似, 求复合函数的微分也可不写出中间变量, 这样更加直接和方便.

结束放映

例7 在下列等式的括号中填入适当的函数，使等式成立.

$$d(\quad)=\cos\omega t dt;$$

解 $\because\ d(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t dt,$

$$\therefore\ \cos\omega t dt=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega t)=d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t);$$

一般地，有 $d\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t dt.$

结束放映

五、微分近似计算公式

1.函数增量的近似计算公式

设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0) \neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小, 则

$$\boxed{\Delta y|_{x=x_0} \approx dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x}$$

2.函数值的近似计算公式

计算 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 附近的近似值:

由 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x.$

得

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x}$$

($|\Delta x|$很小时)

结束放映

特别地, 令 $x_0 = 0, \Delta x = x$, 得到函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 附近的近似公式:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$$

易得常用初等函数的近似公式 ($|x|$ 很小时):

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$; (2) $\sin x \approx x$ (x 为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x 为弧度);

(4) $e^x \approx 1 + x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

结束放映

例8 半径10厘米的金属圆片加热后，半径伸长了0.05厘米，问面积增大了多少？

解 设 $A=\pi r^2$, $r=10$(厘米), $\Delta r=0.05$(厘米).

$$\therefore \quad \Delta A \approx dA$$

$$= 2\pi r \cdot \Delta r$$

$$= 2\pi \times 10 \times 0.05$$

$$= \pi(\text{厘米}^2).$$

结束放映

例 9 计算下列各数的近似值:

(1) $\sqrt[3]{998.5}$; (2) $e^{-0.03}$.

解 (1) $\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}$

$$=\sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)}$$

$$=10\sqrt[3]{1-0.0015}$$

$$=10\left(1-\frac{1}{3}\times 0.0015\right)=9.995.$$

(2) $e^{-0.03}\approx 1-0.03=0.97.$

结束放映