洛必达法则

若当 $x \to a$(或 $x \to \infty$)时, 两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

例如, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \left(\dfrac{0}{0}\right)$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos}{x^2} \left(\dfrac{0}{0}\right)$;

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

结束放映

定理 设(1)当 $x \to a$ 时,函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋于零; (2)在点 a 的某领域内(点 a 本身可除外), $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$; (3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大), 那么

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

结束放映

注: 1. 当 $x \to \infty$ 时, 上述定理仍然成立;

2. 对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 ($x \to a$ 或 $x \to \infty$), 也有与上述定理完全类似的结论:

我们把这种在一定条件下通过对分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

结束放映

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}(k\neq 0).\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin kx)'}{(x)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k\cos kx}{1}$$

$$=k.$$

结束放映

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}.\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$

$=\dfrac{3}{2}.$

注：上式中，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$ 已不是未定式，不能再对它应用洛必达法则.

结束放映

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}$$

$$=2.$$

结束放映

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$

注：若求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan n}{\dfrac{1}{n}}$（$n$为自然数），则可利用

上面求出的函数极限， 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan n}{\dfrac{1}{n}}=1$

结束放映

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$.

解 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x\cos x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}$$

$$=-1.$$

结束放映

例6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0).(\frac{\infty}{\infty})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

例7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}.\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ (n为正整数，$\lambda>0$).

解 反复应用洛必达法则 n次，得

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$

$=\cdots\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$

结束放映

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$.

解 当$x\to 0$时, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\ln(1-2x)\sim 2x$,

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}$$

$$=\frac{9}{2}.$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解 所求极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 的未定式. 但分子分母分别求导数后, 将化为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$, 此式振荡无极限, 故洛必达法则失效, 不能使用. 但原极限是存在的, 可用下法求得:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{0}{1}=0.$$

结束放映

例10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^{x}.(0\cdot\infty)$

解 对于 $(0\cdot\infty)$型, 可将乘积化为除的形式, 即化为

$$\frac{0}{0}\text{或}\frac{\infty}{\infty}$$

型的未定式来计算.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-2}e^{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2}=+\infty.$$

结束放映

例11 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x).\ (\infty-\infty)$

解 对于 $\infty-\infty$ 型, 可利用通分化为 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式来计算.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

结束放映

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

步骤

$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{array}\right. \longrightarrow 0\cdot\infty.$$

例12 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x.(0^0)$

解 $$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

结束放映

例13　求 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\tan x}.(0^0)$

解　将它变形为 $\lim\limits_{x\to+0} x^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\tan x\ln x}$

由于 $\lim\limits_{x\to+0}\tan x\ln x = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\cot x} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{-\sin^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{-2\sin x\cos x}{1} = 0.$$

故　$\lim\limits_{x\to+0} x^{\tan x} = e^0 = 1.$

结束放映

例14　求 $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.$(1^{\infty})$

解　$$\lim_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}.$$

结束放映

例15 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 这是 1^∞ 型未定式, 类似例12, 有

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}.$$

结束放映

例16 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.$(\infty^0)$

解 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\cot x}{\ln x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\tan x\cdot\csc^2 x}{1/x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\cos x}\cdot\frac{x}{\sin x}}$$

$$=e^{-1}.$$

结束放映