



洛必达法则

若当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{0}{0}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right);$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$



定理 设(1)当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋于零; (2) 在点 a 的某领域内(点 a 本身可除外), $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$; (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大), 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



注: 1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 上述定理仍然成立;

2. 对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 ($x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$), 也有与上述定理完全类似的结论:

我们把这种在一定条件下通过对分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为**洛必达法则**.



例1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} (k \neq 0)$. $\left(\frac{0}{0}\right)$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin kx)'}{(x)'}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \cos kx}{1}$$

$$= k.$$



例2

求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

注：上式中， $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2}$ 已不是未定式，不能再对它

应用洛必达法则.



例3

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

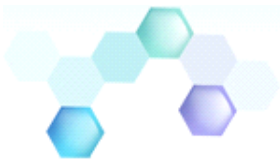
解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$$

$$= 2.$$

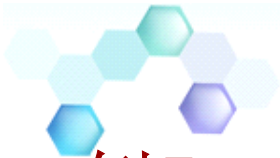


例4 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$. ($\frac{0}{0}$ 型)

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$

注：若求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}}$ (n 为自然数), 则可利用

上面求出的函数极限, 得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}} = 1$



例5

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x}$.

解

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x \cos x}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x}$$

$$= -1.$$



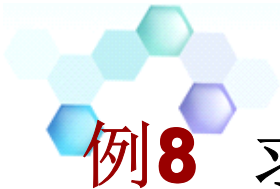
例6 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0)$. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

解 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0$.

例7 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} \cdot \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (n 为正整数, $\lambda > 0$).

解 反复应用洛必达法则 n 次, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} \\ &= \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0. \end{aligned}$$



例8

求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)}$$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\ln(1 + 2x) \sim 2x$,

故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{(1 - \cos x) \ln(1 + 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos 3x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



例9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

解 所求极限属于 $\frac{0}{0}$ 的未定式. 但分子分母分别求导

数后, 将化为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$, 此式振荡无极限,

故洛必达法则失效, 不能使用. 但原极限是存在的, 可用下法求得:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$



例10 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2} e^x$. ($0 \cdot \infty$)

解 对于 ($0 \cdot \infty$)型, 可将乘积化为除的形式, 即化为

$$\frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{\infty}{\infty}$$

型的未定式来计算.


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2} e^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty. \end{aligned}$$



例11 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$. ($\infty - \infty$)

解 对于 $\infty - \infty$ 型, 可利用通分化为 $\frac{0}{0}$ 型的未定式来计算.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$



$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

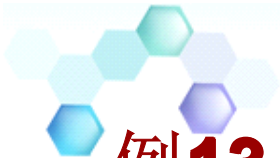
步骤

$$\left. \begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot \ln 0 \\ \infty \cdot \ln 1 \\ 0 \cdot \ln \infty \end{array} \right. \longrightarrow 0 \cdot \infty.$$

例12 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. (0^0)

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$



例13 求 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\tan x} \cdot (0^0)$

解 将它变形为 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\tan x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \tan x \ln x}$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow +0} \tan x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\sin^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-2 \sin x \cos x}{1} = 0.$$

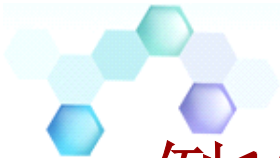
故 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\tan x} = e^0 = 1.$



例14 求 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} \cdot (1^\infty)$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1-x} \ln x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}} = e^{-1}.\end{aligned}$$



例15 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

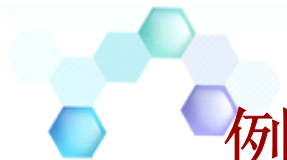
解 这是 1^∞ 型未定式, 类似例12, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos x}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} .$$



例16 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \cdot (\infty^0)$

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln \cot x}{\ln x}}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x \cdot \csc^2 x}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 \cdot x}{\cos x \sin x}}$$

$$= e^{-1}.$$