一、单调性的判别法

定理　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导

(1) 若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$, 则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2) 若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$,则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少;

证 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, 且 $x_1<x_2$, 应用拉氏定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2),$$

结束放映

$\because \quad x_2 - x_1 > 0,$

若在(a,b)内, $f'(x) > 0$, 则 $f'(\xi) > 0$,

$\therefore \quad f(x_2) > f(x_1).$

$\therefore \quad y = f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

若在(a,b)内, $f'(x) < 0$, 则 $f'(\xi) < 0$,

$\therefore \quad f(x_2) < f(x_1).$

$\therefore \quad y = f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

结束放映

单调区间的求法

问题: 如何确定函数在定义域内各部分区间函数的单调性.

定义: 若函数在其定义域的某个区间内是单调的, 则该区间称为函数的单调区间.

注意: 导数等于零的点和不可导点, 均可能是单调区间的分界点.

方法: 用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间, 然后判断区间内导数的符号.

结束放映

例1 讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解 $\because \quad y'=e^x-1.$ 又 $D:(-\infty,+\infty).$

在 $(-\infty,0)$ 内， $y'<0,$

$\therefore$ 函数单调减少；

在 $(0,+\infty)$ 内， $y'>0,$

$\therefore$ 函数单调增加.

注： 函数的单调性是一个区间上的性质，要用导数在这一区间上的符号来判定，而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

结束放映

例2　讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解　$\because$ $D:(-\infty,+\infty)$. $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $(x\neq 0)$,

当 $x=0$ 时，导数不存在. 当 $-\infty<x<0$ 时，$y'<0$,

$\therefore$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少；

当 $0<x<+\infty$ 时，$y'>0$,

$\therefore$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加；

单调区间为 $(-\infty,0]$，$[0,+\infty)$.

注意　区间内个别点导数为零不影响区间的单调性.

例如，$y=x^3$, $y'\big|_{x=0}=0$, 但是$(-\infty,+\infty)$上单调增加.

结束放映

例3 确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

解 $\because$ $D:(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=6x^2-18x+12x=6(x-1)(x-2),$$

解方程 $f'(x)=0$ 得 $x_1=1,x_2=2.$

当$-\infty<x<1$时，$f'(x)>0,$

$\therefore$ $f(x)$在$(-\infty,1]$上单调增加；

当$1<x<2$时，$f'(x)<0,$

结束放映

$\therefore\ f(x)$在$[1,2]$上单调减少；

当$2<x<+\infty$时，$f'(x)>0,$

$\therefore\ f(x)$在$[2,+\infty)$上单调增加；

单调区间为$(-\infty,1],\ [1,2],\ [2,+\infty).$

二、函数极值的定义与求法

定义 设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，x_0是(a,b)内的一个点.

如果存在着点x_0的一个邻域,对于该邻域内的任何点x，除了点x_0外,$f(x)<f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值;

如果存在着点x_0的一个邻域,对于该邻域内的任何点x，除了点x_0外,$f(x)>f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值;

函数的极大值与极小值统称为极值，使函数取得极值的点称为极值点.

结束放映

定理1 (必要条件) 设$f(x)$在点x_0处可导，且在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$.

定义 使导数为零的点(即方程$f'(x)=0$的实根)叫做函数$f(x)$的**驻点**.

注:可导函数$f(x)$的极值点必定是它的驻点,但函数的驻点却不一定是极值点.

例如，$y=x^3$，$y'|_{x=0}=0$，但$x=0$不是极值点.

结束放映

定理2 (第一充分条件) 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内连续并且可导 (导数 $f'(x_0)$也可以不存在),

(1)如果在点x_0的左邻域内$f'(x)>0$; 在点x_0的右邻域内$f'(x)<0$, 则$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)如果在点x_0的左邻域内$f'(x)<0$; 在点x_0的右邻域内$f'(x)>0$, 则$f(x)$在x_0处取得极小值;

(3)如果在点x_0的邻域内, $f'(x)$不变号, 则$f(x)$在x_0 处没有极值.

结束放映

证　由极值的定义和定理的条件即可推得结果.

综上所述，可将求函数极值的步骤总结如下:

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点, 及使 $f'(x)$ 不存在的点 x_k;

(3) 检查 $f'(x)$ 在 x_k 左右的正负号, 确定极值点;

(4) 求出函数极值.

结束放映

例 4 求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=3$.

列表讨论如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以, 极大值 $f(-1)=10$, 极小值 $f(3)=-22$.

结束放映

例 5　求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值.

解　(1) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, 除 $x=-1$ 外处处可导，且

$$f'(x)=\frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}};$$

(2) 令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=1$; $x=-1$ 为 $f(x)$ 的不可导点;

(3) 列表讨论如下:

结束放映

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

(4) 极大值为 $f(-1)=0$，极小值为 $f(1)=-3\sqrt[3]{4}$.

结束放映

例 6 求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{2/3}$ 的单调增减区间和极值.

解 求导数 $f'(x)=1-x^{-1/3}$,

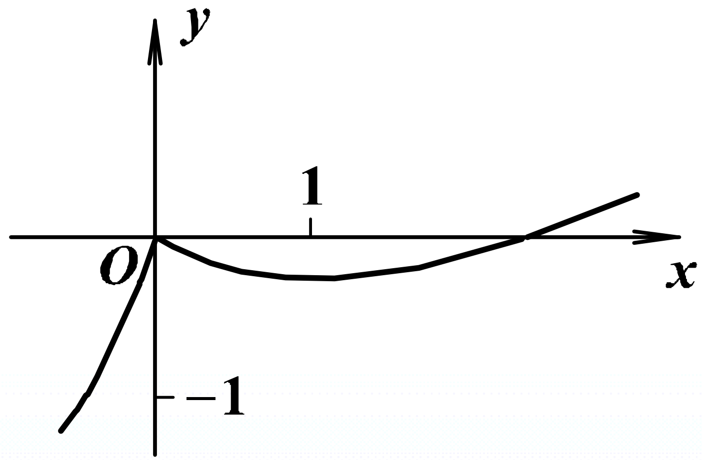
当 $x=1$ 时 $f'(0)=0$, 而 $x=0$ 时 $f'(x)$ 不存在,

因此, 函数只可能在这两点取得极值. 列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值0	↘	极小值 $-\frac{1}{2}$	↗

结束放映

由上表可见：函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$ 单调增加，在区间 $(0,1)$ 单调减少．在点 $x=0$ 处有极大值，在点 $x=1$ 处有极小值 $f(1)=-\frac{1}{2}$，如图．



结束放映

定理3(第二充分条件)设$f(x)$在x_0处具有二阶导数,且$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 则

(1)当$f''(x_0)<0$时, 函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时, 函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

证 (1) 因 $f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0$,

故 $f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$与Δx异号,

当$\Delta x<0$时, 有$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0$,

当$\Delta x>0$时, 有$f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0$,

所以, 函数$f(x)$在x_0处取得极大值.

同理可证(2).

结束放映

例7 求出函数$f(x)=x^3+3x^2-24x-20$的极值.

解 $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$,

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-4, x_2=2$.

又 $f''(x)=6x+6$, $\because f''(-4)=-18<0$,

故极大值 $f(-4)=60$, $f''(2)=18>0$,

故极小值 $f(2)=-48$.

注意 1. $f''(x_0)=0$ 时, $f(x)$在点x_0处不一定取极值, 仍用第一充分条件进行判断.

2. 函数的不可导点, 也可能是函数的极值点.

结束放映

例8 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 由 $f'(x)=6x(x^2-1)^2=0$, 得驻点 $x_1=-1$, $x_2=0, x_3=1$.

$$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1).$$

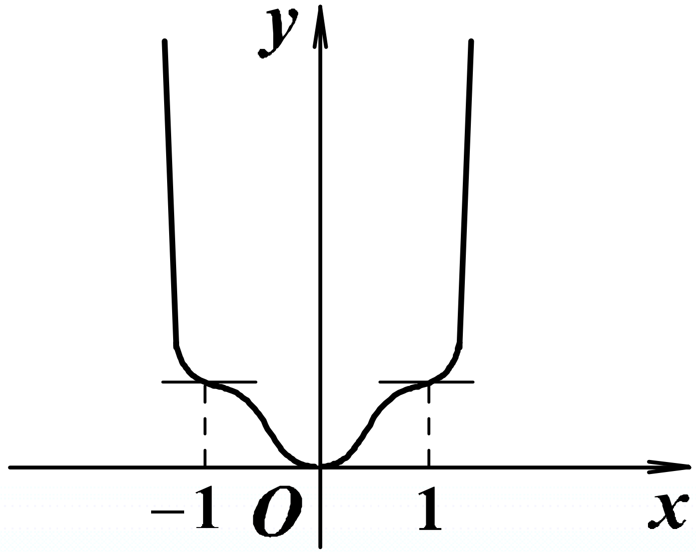
因 $f''(x)=6>0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 极小值为 $f(0)=0$. 因 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故用定理3无法判别. 考察一阶导数 $f'(x)$ 在驻点 $x_1=-1$ 及 $x_3=1$ 左右邻近的符号:

当 x 取 -1 左侧邻近的值时, $f'(x)<0$;

当 x 取 -1 右侧邻近的值时, $f'(x)<0$;

结束放映

因 $f'(x)$ 的符号没有改变，故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处没有极值. 同理，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处也没有极值. 如图所示.



三、最大值最小值的求法

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，除个别点外处处可导，并且至多有有限个导数为零的点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值存在.

步骤：1. 求驻点和不可导点；

2. 求区间端点、驻点及不可导点的函数值，比较大小，哪个大哪个就是最大值，哪个小哪个就是最小值.

注意：如果区间内只有一个极值，则这个极值就是最值（最大值或最小值）.

结束放映

例 9　求 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

解　$\because f'(x) = 6(x+2)(x-1)$, 解方程 $f'(x) = 0$,

得　$x_1 = -2, x_2 = 1.$

计算　$f(-3) = 23;$　　$f(-2) = 34;$

$f(1) = 7;$　　$f(4) = 142;$

比较得　最大值 $f(4) = 142$, 最小值 $f(1) = 7;$