

文章编号: 1000-4750(2016)10-0035-09

求解摩擦接触问题的 IGA-B 可微方程组方法

薛冰寒¹, 林 皋¹, 胡志强¹, 张 勇²

(1.大连理工大学建设工程学部, 辽宁, 大连 116024; 2.中国科学院核能安全技术研究所, 安徽, 合肥 230031)

摘 要: 该文将等几何分析(Isogeometric analysis, 简称 IGA)和 B 可微方程组方法相结合, 提出了求解弹性摩擦接触问题的 IGA-B 可微方程组方法。其中, 接触边界的几何形状由非均匀有理 B 样条(NURBS) 精确描述; 接触条件则表示成 B 可微方程组的形式, 可被严格满足, 且在一定条件下求解该方程组的算法收敛性有理论保证。数值算例验证了该文方法用于求解弹性摩擦接触问题的有效性, 计算精度较高, 通过与 ANSYS 软件中的接触模型相比, 计算自由度可以大量节约。

关键词: 弹性摩擦接触问题; IGA-B 可微方程组方法; 等几何分析; B 可微方程组; ANSYS 接触模型

中图分类号: O343 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.03.0164

ANALYSIS OF FRICTIONAL CONTACT MECHANICS PROBLEMS BY IGA-B DIFFERENTIAL EQUATION METHOD

XUE Bing-han¹, LIN Gao¹, HU Zhi-qiang¹, ZhANG Yong²

(1. Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. Institute of Nuclear Energy Safety Technology, CAS, Hefei, Anhui 230031, China)

Abstract: In order to solve a frictional contact problem, the isogeometric analysis combined with B differential equation method (IGA-BDE method) is developed. The geometry of boundaries of two contact bodies are represented accurately by NURBS. The contact conditions are formulated as a B differential equation and satisfied rigorously, and the convergence of algorithm to solve the B differential equation is guaranteed by the theory of mathematical programming. Numerical results validate the effectiveness and accuracy of the proposed IGA-BDE method to solve the elastic frictional contact problems. In contrast with the finite element method by employing an ANSYS contact model, the number of degree of freedom can be saved to a great extent.

Key words: elastic frictional contact problem; IGA-B differential equation method; Isogeometric analysis; B differential equation; ANSYS contact model

接触问题是计算力学领域最具挑战性的问题之一, 其难点在于接触边界和接触状态均事先未知, 而且是随时间变化的, 属于状态非线性问题。摩擦接触条件是单边性的不等式约束, 使得系统的泛函具有非线性和非光滑的特点, 导致算法的收敛性和精确性难以得到保证。有限单元法^[1]作为求解复杂工程问题的最有效的数值方法之一, 也成为求

解接触问题的一种主要数值方法。但传统有限元法采用 Lagrange 插值函数, 对于曲边或曲面形式的物体边界形状, 拟合精度较差, 而在求解接触问题中, 解对边界几何形状的变化非常敏感^[2], 在一些情况下接触边界几何描述不准确会导致计算结果产生较大的误差。

等几何分析(IGA)由 Hughes 等^[3]于 2005 年提

收稿日期: 2015-03-06; 修改日期: 2015-09-06

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(51138001)

通讯作者: 薛冰寒(1991—), 男, 河南人, 博士生, 从事大型结构非线性及接触分析研究(E-mail: xuebinghan@mail.dlut.edu.cn).

作者简介: 林 皋(1929—), 男, 江西人, 教授, 中国科学院院士, 从事大型结构工程抗震及安全评价研究(E-mail: gaolin@dlut.edu.cn);

胡志强(1972—), 男, 辽宁人, 副教授, 博士, 从事大型结构非线性及接触分析研究(E-mail: huzhq@dlut.edu.cn);

张 勇(1983—), 男, 湖北人, 助理研究员, 博士, 从事等几何分析数值计算的研究及应用(E-mail: yong.zhang@fds.org.cn).

出,近年来得到迅速发展,其基本思想是,直接利用 CAD 中描述几何形体的基函数进行计算分析,避免了传统有限元的二次建模。这样可以避免几何模型与计算模型之间的误差,保留了几何模型中的几何连续与光滑特点,在自适应分析过程中,网格重剖分操作简单,且保持几何形状不变。

目前,IGA 已被成功地应用到众多领域,如流体力学与流固耦合问题^[4]、结构动力学问题^[5]、板壳问题^[6]、电磁场问题^[7]等。IGA 对接触问题的应用还处于起步阶段^[8],Lu^[9]首先提出了接触问题等几何分析的框架,采用 NURBS 基函数进行几何描述和分析,发展了满足变分一致性的面-面光滑接触算法。Temizer 等^[10]提出了基于 IGA 的点-面接触算法,对无摩擦有限变形热弹接触问题进行了定性研究。De Lorenzis 等^[11]利用 IGA 成功解决了二维大变形摩擦接触问题。De Lorenzis 等^[12-13]进一步将 IGA 用于三维无摩擦大变形接触问题和有摩擦接触问题。Kim^[14]为了解决 IGA 框架下接触面的确定问题,提出了一种新的接触匹配算法。

针对接触约束条件,目前主要采用罚函数法^[10-11]、拉格朗日乘法^[9,13-14]或增广拉格朗日乘法^[12]将接触约束条件引入到系统的总泛函,再根据虚功原理或变分原理得到系统的整体平衡方程,求解过程实际就是接触状态的迭代过程。罚函数法是一种近似方法,允许接触体之间出现嵌入,罚因子的选取对计算结果的精度和收敛性影响很大。拉格朗日乘法可以精确满足接触条件,拉格朗日乘子的力学意义是接触力。增广拉格朗日乘法通过引入高次罚因子,改善了收敛性。在迭代方法^[15]中,一般利用经典的 Newton-Raphson 迭代方法求解平衡方程,在迭代过程中需根据接触条件修正刚度阵和荷载项。由于引入接触力泛函使得系统的总泛函是非光滑的,这就就会导致当采用迭代法求解复杂接触问题时,尤其是三维摩擦接触问题,适用于光滑函数的 Newton-Raphson 迭代方法的收敛性就难以得到保证。

数学规划法则将接触约束条件表示成线性互补模型^[16-17]、非线性互补模型^[18-19]、B-可微方程组^[20]等形式,同时求解平衡方程组及接触方程组。数学规划法在处理满足一定条件的非光滑函数最小化问题时,其收敛性是有保证的。在数学规划方法中,线性互补模型对三维摩擦接触条件做了一定的简化,即采用正多棱锥来近似库仑摩擦圆锥,降低

了解的精度。非线性互补模型、B 可微方程组模型则可精确满足库仑摩擦接触条件。

因此本文提出了 IGA-BDE 方法,该方法解决了有限元方法无法精确描述接触面的几何形状的难题,与其他模拟接触条件的方法相比,该方法严格满足接触条件,收敛性有理论保证。

1 摩擦接触问题的基本描述

本文假定物体变形在线弹性范围内,且为小变形、小应变、小转动,两接触体之间的间隙相比于接触体尺寸很小,物体接触面经过离散后,采用点对接触模型来进行接触条件的判断和施加。接触系统由接触体 Ω^1 和 Ω^2 组成。接触体 $\Omega^i (i=1,2)$ 上的给定位移边界和外荷载边界分别用 S_u^i 和 S_q^i 表示,两接触体上的可能公共接触边界用 S_c^i 表示,在接触体 Ω^2 的可能接触面 S_c^2 上定义局部坐标系 nab ,其中向量 n 为可能接触面 S_c^2 的外法向,由接触体 Ω^2 指向接触体 Ω^1 ,而向量 a 、 b 表示可能接触面 S_c^2 上的两个任意垂直的向量。由于摩擦接触问题是非线性问题,因而需采用增量形式的控制方程进行求解,所用到的符号说明及度量定义如下:变量前面加 d 表示该变量的增量,变量前面加 Δ 表示两接触体上该变量的相对差值,上标 1 和 2 分别表示接触体 Ω^1 和 Ω^2 ,下标 n 、 a 、 b 分别表示局部坐标系下的变量分量, u 表示位移, σ 表示应力。局部坐标系中可能接触点对的相对位移及相对位移的增量定义如下:

$$\Delta u_i = u_i^1 - u_i^2 + \Delta u_i^0, \Delta d u_i = d u_i^1 - d u_i^2, i = n, a, b \quad (1)$$

其中, Δu_i^0 为可能接触面之间的初始间隙。

局部坐标系下的摩擦接触条件包括:1) 两接触面上的接触应力大小相等、方向相反,因而可采用作用在一个接触面上的接触应力来进行接触判断和计算接触应力所做的功;2) 在法线方向上,接触应力为压应力,且不能相互嵌入,在下面的分析中,假定正值表示接触应力为压应力;3) 在接触面切线方向上,采用库仑摩擦定律,即切向接触应力不超过法向接触应力与摩擦系数的乘积,且滑动位移向量与切向接触应力向量在一条直线上,但方向相反。

2 NURBS 基函数与几何形体描述

2.1 B 样条与 NURBS 基函数

B 样条是样条曲线一种特殊的表示形式,它是

B 样条基函数的线性组合。B 样条基函数 $N_{i,p}$, $i=0,1,\dots,n$ 是定义在节点向量 $\Xi=(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n)$ 上的一组可具有高阶连续性的函数。一维 B 样条基函数可由 Cox-de Boor 公式^[21], 递归的方式进行定义:

$$\begin{cases} N_{i,0} = \begin{cases} 1, & \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \\ N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), p \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中: p 为基函数的阶次; ξ_i 是节点; i 是节点编号。

节点向量 Ξ 由非减的节点序列组成, 如果一个节点向量的第一个和最后一个节点是 $p+1$ 重的, 则称之为开放节点矢量^[22], 基于开放节点矢量的 B 样条基函数在节点向量的端点处具有插值性, 它是 CAD 的设计标准, 因此本文采用的是开放节点矢量。

二维、三维 B 样条基函数可由一维 B 样条基函数以张量积的方式形成:

$$N_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta) \quad (3)$$

$$N_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta) = N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)N_{k,r}(\zeta) \quad (4)$$

其中: $N_{i,p}(\xi)$ 、 $N_{j,q}(\eta)$ 、 $N_{k,r}(\zeta)$ 分别为不同方向上独立的一维 B 样条基函数。

非均匀有理 B 样条(NURBS)基函数是在 B 样条基础上采用有理分式和引入权的方式构造的基函数。一维、二维和三维的 NURBS 基函数见式(5)、式(6)、式(7)。

$$R_i^p(\xi) = \frac{\omega_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{i=0}^{n_u} \omega_i N_{i,p}(\xi)} \quad (5)$$

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = \frac{\omega_{i,j} N_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)}{\sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} \omega_{i,j} N_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta)} \quad (6)$$

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\omega_{i,j,k} N_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta)}{\sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} \sum_{k=0}^{n_w} \omega_{i,j,k} N_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta)} \quad (7)$$

式中: ω_i 、 $\omega_{i,j}$ 、 $\omega_{i,j,k}$ 是与 NURBS 几何形状相关的权值; n_u 、 n_v 、 n_w 分别为 ξ 、 η 、 ζ 向 B 样条基函数个数。

基于开放性节点矢量(0,0,0,1,2,3,4,4,4)的二次 NURBS 基函数如图 1 所示。

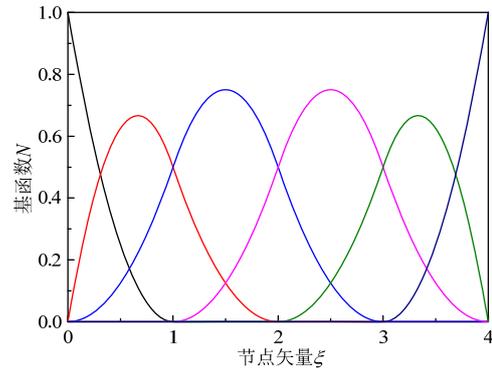


图 1 二次 NURBS 基函数

Fig.1 Quadratic NURBS basis function

NURBS 基函数通过改变权值可以更准确地建立二次曲线或曲面, 如圆锥曲线和曲面; 如果权值相同, NURBS 基函数将退化为 B 样条基函数。

NURBS 基函数具有单位分解性、线性无关性、紧支性、高阶连续性、非负性、递归求导性、保形细分等性质。其中高阶连续性有利于构造高阶未知变量场, 可更好地刻画未知变量场的局部变化, 非负性可使得采用高阶单元具有重要的意义, 求解接触问题时, 能够保证各点的接触应力为正值。

2.2 基于 NURBS 基函数的几何形体描述

基于 NURBS 基函数的一维、二维和三维几何形体的参数表达式, 如式(8)、式(9)、式(10)所示:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^{n_u} R_i^p(\xi) P_i \quad (8)$$

$$S(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) P_{i,j} \quad (9)$$

$$V(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} \sum_{k=0}^{n_w} R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta) P_{i,j,k} \quad (10)$$

其中, P_i 、 $P_{i,j}$ 、 $P_{i,j,k}$ 为 NURBS 几何形体的控制点。

典型的二次 NURBS 曲线如图 2 所示, 其中的黑圆点 \bullet 表示控制点位置, 所采用的基函数如图 1 所示。

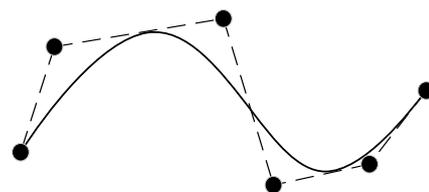


图 2 二次 NURBS 曲线

Fig.2 Quadratic NURBS curve

3 弹性接触系统的 IGA-BDE 方法求解

弹性接触系统增量形式的虚功方程可写为:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^1+\Omega^2} d\sigma_{ij} \delta d\varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega^1+\Omega^2} d\bar{b}_i \delta du_i d\Omega - \\ & \int_{S_q^1+S_q^2} d\bar{q}_i \delta du_i dS - \int_{S_c^1+S_c^2} [d\sigma_n (\delta du_n^1 - \delta du_n^2) + \\ & d\sigma_a (\delta du_a^1 - \delta du_a^2) + d\sigma_b (\delta du_b^1 - \delta du_b^2)] dS = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$du_i \in D_u = \{du_i : du_i = d\bar{u}_i \quad x_i \in S_u\} \quad (12)$$

其中: du_i 表示位移增量; $d\bar{u}_i$ 、 $d\bar{q}_i$ 、 $d\bar{b}_i$ 分别表示给定的位移增量、面力增量、体力增量; $d\sigma_{ij}$ 、 $d\varepsilon_{ij}$ 分别表示应力增量和应变增量; D_u 表示可行位移集。

3.1 等几何离散

由于结构的几何形状是采用 NURBS 描述的, 根据等几何方法的思想, 通过对节点向量进行划分, 可获得有限元离散网格, 并且 NURBS 也作为位移场的插值函数。这样几何形状描述和计算分析都采用统一的 NURBS 基函数, 实现 CAD 与 CAE 的紧密结合。

式(11)是整个系统的虚功方程, 对于系统的离散形式, 需要将计算域划分成小的单元。如果计算域采用的是 NURBS 进行描述, 并使用 NURBS 单元进行弱化, 则称为等几何离散。NURBS 单元是由 NURBS 基函数的紧支性衍生出来的, 并非二次建模所产生的。IGA 与传统有限元类似, 也包含单元分析和整体组装两个方面。

接触系统经等几何离散后, 式(11)可写为:

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e+\Omega^{2e}} d\sigma_{ij} \delta d\varepsilon_{ij} d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e+\Omega^{2e}} d\bar{b}_i \delta du_i d\Omega - \\ & \sum_e \int_{S_q^1+S_q^2} d\bar{q}_i \delta du_i dS - \sum_e \int_{S_c^1+S_c^2} [d\sigma_n (\delta du_n^1 - \\ & \delta du_n^2) + d\sigma_a (\delta du_a^1 - \delta du_a^2) + \\ & d\sigma_b (\delta du_b^1 - \delta du_b^2)] dS = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

在进行单元分析时, 需要构造变量场, IGA 的核心思想是利用等几何模式构造变量场, 其本质与传统有限元中的等参思想相同, 即利用与几何形体相同的方法描述变量场:

$$du^e = N^e d\tilde{u}^e \quad (14)$$

其中:

$$\begin{cases} N^e = [N_1 I_s, N_2 I_s, N_3 I_s, \dots, N_{ncp} I_s] \\ d\tilde{u}^e = \{d\tilde{u}_1, d\tilde{u}_2, d\tilde{u}_3, \dots, d\tilde{u}_{ncp}\} \end{cases} \quad (15)$$

式(14)左端项表示 NURBS 单元内任一点的位移增量, 右端项分别表示与 NURBS 单元相关联的控制点基函数和控制点位移增量。

将式(14)代入式(13), 并进行整体组装可以得到系统的平衡方程:

$$Kdu - dR - dP = 0 \quad (16)$$

其中: K 、 du 、 dR 、 dP 分别表示结构的刚度阵、节点位移增量、外荷载增量和接触力增量。

3.2 摩擦接触条件的 B 可微方程组表示形式

基于小变形、小位移的假设, 本文采用点对模型进行接触条件的判断和施加。以 i 表示可能接触的点对编号, NC 表示可能接触点对总数, p_n^i 、 p_a^i 、 p_b^i 分别表示接触点对 i 处的法向和沿 a 、 b 轴的两个切向接触力, Δdu_n^i 、 Δdu_a^i 、 Δdu_b^i 分别表示接触点对 i 处的法向相对位移和切向相对位移增量, 则摩擦接触条件的 B 可微方程组(BDE)^[20] 表示形式如下:

$$H_2^i = \min\{r\Delta du_n^i, p_n^i\} = 0 \quad (17)$$

$$H_3^i = p_a^i - \lambda p_n^i(r) = 0 \quad (18)$$

$$H_4^i = p_b^i - \lambda p_n^i(r) = 0 \quad (19)$$

式中:

$$p_a^i(r) = p_a^i - r\Delta du_a^i, p_b^i(r) = p_b^i - r\Delta du_b^i \quad (20)$$

$$\lambda = \min\{\mu \max\{p_n^i, 0\} / \sqrt{(p_a^i)^2 + (p_b^i)^2}, \dots, 1\} \quad (21)$$

其中: $i=1, 2, \dots, NC$; r 取正值, 式(17)是法向接触条件, 式(18)、式(19)分别为切向接触条件。

将式(17)、式(18)、式(19)所表示的接触条件与平衡方程式(16)联立, 就可得到弹性静力摩擦接触系统的控制方程, 统一记为:

$$H(x) = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}^T = \{0, 0, 0, 0\}^T \quad (22)$$

式中: $H_1 = 0$ 表示平衡方程式(16), 变量 x 表示系统的未知量, 包括节点位移和接触点对的接触力向量。对于式(22), 可采用 B-可微阻尼牛顿法^[23] 进行迭代求解, 该算法的收敛性有理论保证。

式(22)中, 平衡方程的个数是 $NDOF$ 个($NDOF$ 表示系统总自由度个数), 接触方程个数为 $3*NC$ 个。对于弹性接触问题, 当接触点对个数较少时, 为了提高求解效率, 可以将平衡方程式(16)凝聚到接触边

界上, 得到以接触点对相对位移和接触力表示的凝聚形式, 见式(23)。

$$\begin{Bmatrix} \Delta du_n \\ \Delta du_a \\ \Delta du_b \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^L \begin{Bmatrix} dP_n \\ dP_a \\ dP_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} dq_n \\ dq_a \\ dq_b \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{F}^L = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^G \mathbf{T} \quad (24)$$

其中: \mathbf{F}^L , \mathbf{F}^G 分别表示局部坐标系下和整体坐标系下的接触柔度阵, 即作用在接触点对上的一对单位接触力所产生的相对位移; $dq_i (i = n, a, b)$ 表示外荷载增量引起的接触点对相对位移增量; \mathbf{T} 表示接触点对处定义的全局坐标系 xyz 和局部坐标系 nab 之间的坐标转换矩阵。然后利用 B-可微阻尼牛顿法求解接触条件对应的 B 可微方程组即 $\{H_2, H_3, H_4\}^T = \{0, 0, 0\}^T$ 得到接触力, 在求解过程中, 要用到接触柔度阵 \mathbf{F}^L , 再将接触力代入平衡方程求出接触体的位移。

对于接触点对较多的情形, 则可采用变量替换的方法^[24], 在每次迭代过程中, 根据接触条件 $H_i = 0, i = 2, 3, 4$, 修改平衡方程 $H_1 = 0$, 然后求解修改后的平衡方程。

3.3 接触柔度阵的求解

接触柔度阵 \mathbf{F}^G 可通过在每个接触点对处依次施加 x 、 y 、 z 方向的单位接触力对, 即在接触体 Ω^1 和 Ω^2 上的相应接触点对处依次分别作用值为 1 和 -1 的力, 然后计算每个接触点对的相对位移而获得。

图 3 为用 NURBS 基函数建立的两个曲梁接触问题计算模型, 其中实心圆点和虚线分别表示控制点和控制点网格, 环向中间曲线为接触区域。从图 3 可以看出, 控制点并不全在接触体实体上, 即控制点变量并不代表对应位置的场值, 而在求解接触柔度阵时, 单位接触力对需要施加在接触点对所对应的实体节点上的, 因此如何将实体节点上的单位接触力等效为相关的控制点荷载, 成为采用 IGA 方法求解接触问题的一个难题。

本文根据虚功原理将单位接触力等效为相关的控制点荷载, 以接触点对 i 为例, 根据虚功原理:

$$P_i \delta u_i = \sum_{j=1}^{NCp} \bar{P}_{ij} \delta \bar{u}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, NCp \quad (25)$$

其中: P_i 表示接触点 i 处施加的单位接触力; δu_i 表示在接触点 i 处的虚位移; \bar{P}_{ij} 表示在接触点 i 处施加单位接触力时在控制点 j 处的等效集中力; $\delta \bar{u}_{ij}$ 表示在接触点 i 处施加单位接触力时在控制点 j 处产生

的虚位移; $NCtp$ 控制点个数, NCp 接触点对个数。

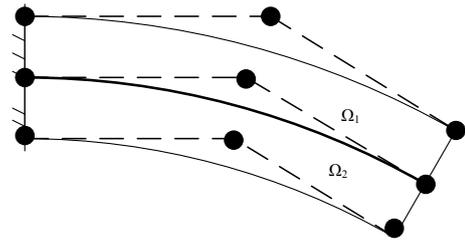


图 3 曲梁接触问题的控制点网格及 NURBS 单元

Fig.3 The control points net and NURBS element of curve beam contact problem

接触点处的虚位移 u_i 与控制点处的虚位移 \bar{u}_{ij}

有如下关系:

$$\delta u_i = \sum_{j=1}^{NCtp} N_{ij} \delta \bar{u}_{ij} \quad (26)$$

根据 NURBS 基函数的非负性, 在接触点 i 处的基函数 N_{ij} 可分为两部分, 一部分是恒为零的基函数 N_{ij}^{zz} , 一部分是不恒为零的基函数 N_{ij}^{nz} 。恒为零的基函数对应的控制点虚位移对接触点 i 处的虚位移没有贡献, 所以式(26)进一步可写成:

$$\delta u_i = \sum_{j=1}^{Nnz} N_{ij}^{nz} \delta \bar{u}_{ij} \quad (27)$$

其中, Nnz 表示非零基函数的个数。

将式(27)代入式(25), 可得:

$$P_i \sum_{j=1}^{Nnz} N_{ij}^{nz} \delta \bar{u}_{ij} = \sum_{j=1}^{Nnz} \bar{P}_{ij} \delta \bar{u}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, NCp \quad (28)$$

根据 $\delta \bar{u}_{ij}$ 的任意性,

$$\bar{P}_{ij} = P_i N_{ij}^{nz}, \quad i = 1, 2, \dots, NCp; \quad j = 1, 2, \dots, Nnz \quad (29)$$

式中: \bar{P}_{ij} 便是作用在控制点上的等效集中力, 然后代入接触体的平衡方程求得控制点处的位移, 再通过式(1)求出接触节点的相对位移。对每个接触点对 x 、 y 、 z 方向循环, 就可以获得接触边界处的柔度阵 \mathbf{F}^G 。

接触体的接触力通过求解凝聚之后的 B 可微方程组获得, 由于接触力是作用在接触点对处的力, 不能直接用于平衡方程, 需要由式(29)将节点接触力等效为控制点荷载, 然后代入平衡方程求节点位移。

4 数值算例

4.1 Hertz 接触问题

为了验证本文算法的精度, 选取典型的 Hertz 接触问题进行对比分析, 即圆柱体-面接触问题, 其模型如图 4 所示, 圆柱体半径 $R=8$ m, 弹性模量

$E=1000 \text{ Pa}$, 泊松比 $\nu=0.3$, 外荷载 $P=240 \text{ N}$ 。

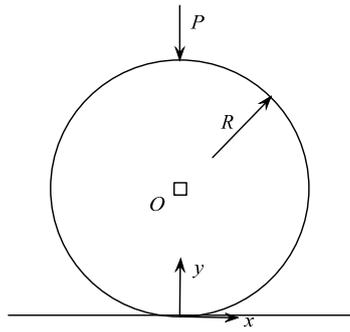


图 4 圆柱体-面接触

Fig.4 Contact of the body and surface

根据 Hertz 接触理论, 接触区域半径 a 为 1.49 m , 本文算法计算出的接触区域半径 a 为 1.50 m , 与解析解相当吻合。

本文算法计算出的接触力与 Hertz 解析解计算结果如图 5 所示。由图 5 可见, 本文算法计算结果与解析解十分吻合。

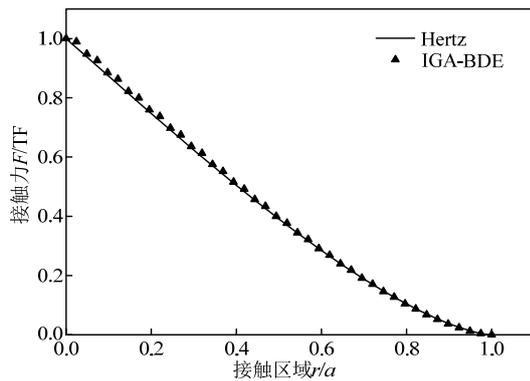


图 5 计算结果与解析解的比较

Fig.5 Comparison of numerical and analytical results

4.2 三维悬臂梁接触问题

为了验证本文算法在求解 3D 摩擦接触问题时的精确性, 选取如图 6 所示的两个 3D 悬臂梁进行分析。如图 6 所示, 虚线部分为接触面, 两个梁之间的初始间距为 0, 在上部梁 Ω^1 顶部两侧端点 A、B 处沿 x、y、z 向施加集中力, 大小均为 -100 kN 。材料参数为: 弹性模量 30 GPa , 泊松比 0.3 , 摩擦系数为 0.5 。本算例中, IGA-BDE 方法采用 2 阶 NURBS 基函数, ANSYS 采用 20 节点 SOLID95 实体二次单元, 采用增广拉格朗日法施加接触约束条件。

表 1 中列出了 IGA-BDE 方法与 ANSYS 点点接触模型计算出的各个方向上接触力总和, 两种方法

计算出的各方向接触力总和的最大相对误差为 2.34% 。

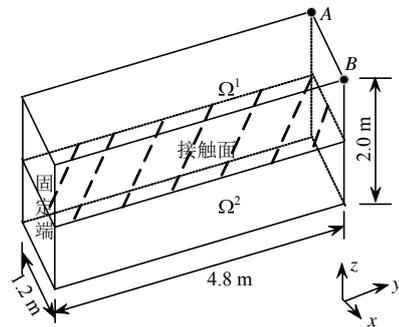


图 6 悬臂梁的几何尺寸

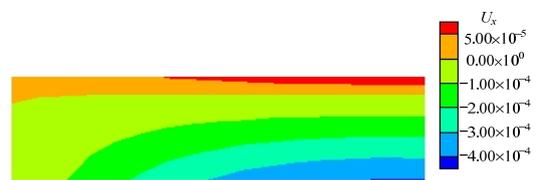
Fig.6 Contact of two cantilever beams

图 7~图 9 分别为采用两种方法得到的在梁 Ω^1 的接触面上 x、y、z 三个方向的位移分布图, 由图 7~图 9 可见两种模型计算出的位移分布与大小基本相同。

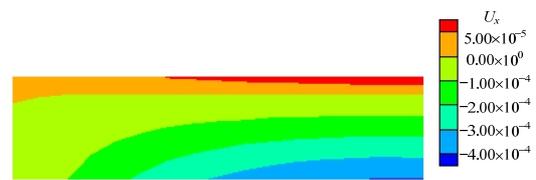
表 1 不同接触模型接触面上总的接触力

Table 1 Total contact forces for difference models

接触模型	接触力/kN		
	x 方向	y 方向	z 方向
IGA-BDE	59.352	48.370	168.998
ANSYS-NTN	60.742	49.404	171.730
相对误差 $\frac{F_{IGA-BDE} - F_{ANSYS-NTN}}{F_{IGA-BDE}} / (\%)$	2.34	2.14	1.62



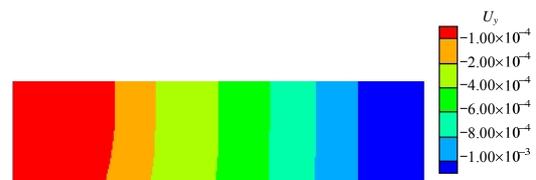
(a) IGA-BDE 方法



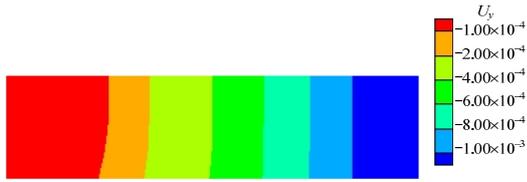
(b) ANSYS 点点接触模型

图 7 x 向位移分布图

Fig.7 Distribution of x-displacement



(a) IGA-BDE 方法



(b) ANSYS 点点接触模型

图 8 y 向位移分布图

Fig.8 Distribution of y-displacement



(a) IGA-BDE 方法



(b) ANSYS 点点接触模型

图 9 z 向位移分布图

Fig.9 Distribution of z-displacement

4.3 三维曲梁接触问题

两个三维曲梁叠放，曲梁几何尺寸如图 10 所示，在梁 Ω^1 顶部沿 x 、 y 、 z 三方向施加集中荷载，数值均为 -100 kN。曲梁的材料参数：弹性模量 30 GPa，泊松比 0.3 ，摩擦系数为 0.5 。

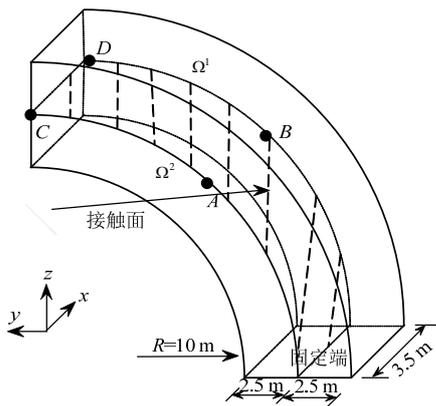


图 10 曲梁的几何尺寸

Fig.10 Contact of two curve beams

IGA-BDE 方法采用 2 阶 NURBS 基函数描述曲梁初始几何模型，并对初始等几何模型利用 h -细分策略进行细分，得到从粗到细的 5 种尺寸单元的计算模型，如表 2 所示。针对每一种单元网格尺寸，在 ANSYS 中也利用二次单元划分与之相对应的有

限元模型。不同网格密度模型的计算自由度个数与单元个数之间的关系如图 11 所示。从图 11 可以看出随着单元数量的增加，ANSYS 中 Lagrange 单元模型中的计算自由度迅速增加，而 IGA-BDE 方法中 NURBS 单元模型的计算自由度增速明显缓慢，对于相同的单元个数，IGA-BDE 方法消耗更少的计算自由度。这是因为 NURBS 基函数的高阶连续性使单元间有更多的共享自由度。

表 2 计算模型网格密度

Table 2 The grid density of difference calculation models

计算网格	网格数		
	径向	环向	厚度方向
1	2	2	2
2	4	4	4
3	8	8	8
4	8	16	8
5	8	32	8

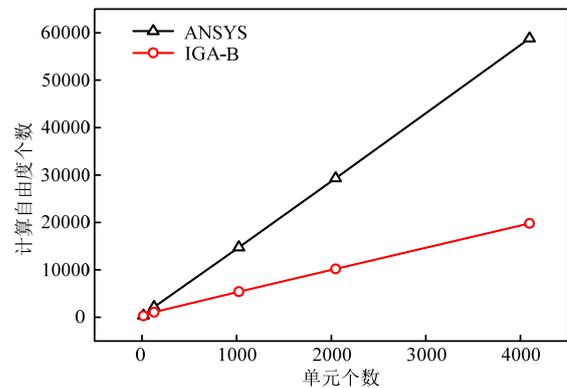


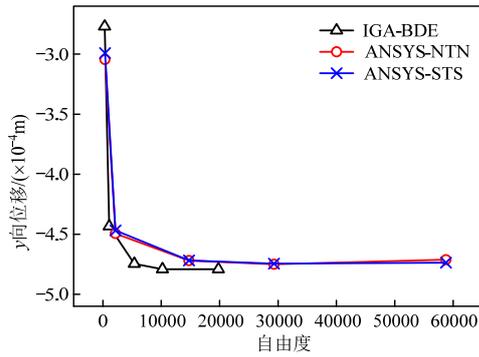
图 11 计算自由度数量与单元数量关系图

Fig.11 Number of DOFs vs number of elements

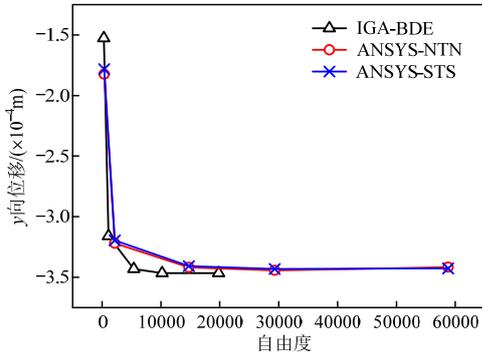
选取接触面中点处、左端端点处各两个接触点作为典型点，典型点均属于上部曲梁 Ω^1 。图 12 为采用不同模型计算得到的曲梁典型点处的竖向位移结果对比，由图可见在两种计算模型得到的结果趋于稳定值时，IGA-BDE 方法与 ANSYS 点点接触模型、ANSYS 面面接触模型相比消耗的计算自由度要减少很多。

由于 IGA 方法可采用较少的控制点来精确刻画二次曲线，因而在同样的网格密度条件下 IGA-BDE 方法中的接触点对个数会少于 ANSYS 点点接触模型中的接触点对个数，可使得凝聚之后的 BDE 阶数不会太高，提高了接触迭代计算效率。但是过少的接触点对可能会导致 IGA-BDE 方法得到的解的精度低于 ANSYS 点点接触模型，如表 2 中网格 1、网格 2 的情形，但从图 12 可见当网格密度较大时，如表 2 中网格 3~网格 5，IGA-BDE 方法可

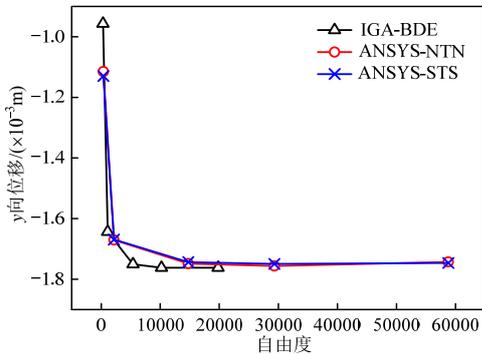
采用较少的计算自由度和接触点对个数, 获得较高的精度和接触迭代计算效率。



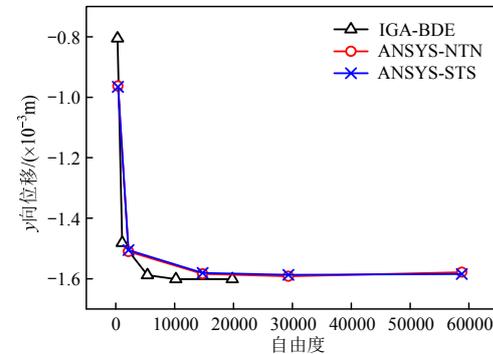
(a) A 点竖向位移



(b) B 点竖向位移



(c) C 点竖向位移



(d) D 点竖向位移

图 12 不同模型典型点位移对比

Fig.12 Comparison of displacements at typical contact nodes for difference models

为了进一步对比本文算法与 ANSYS 中不同接触模型的收敛性与接触迭代计算效率, 在对计算网格 4 进行分析时将 ANSYS 中罚因子分别取为 0.01、10。表 3 列出了 IGA-BDE 方法和 ANSYS 点点、面面接触模型取不同罚因子时的收敛情况与迭代时间。由表 3 可见, 当罚因子取 10 时, ANSYS 点点接触模型不收敛, IGA-BDE 方法和 ANSYS 面面接触模型的收敛性要优于 ANSYS 点点接触模型; IGA-BDE 方法的接触迭代耗时要比 ANSYS 点点、面面接触模型少, 并且 ANSYS 接触模型接触迭代耗时受罚因子的影响。

表 3 IGA-BDE 与 ANSYS 计算结果

Table 3 The list of results of IGA-BDE and ANSYS

计算网格 4	IGA-BDE	ANSYS-NTN FKN		ANSYS-STN FKN	
		0.01	10	0.01	10
收敛性	收敛	收敛	不收敛	收敛	收敛
迭代耗时/s	3.7	11.8	—	9.3	36.5

5 结论

对于弹性摩擦接触问题, IGA-BDE 方法可精确描述物体接触边界, 获得精确的计算模型, 对模型进行细分时, 具有细分保形性, 并能严格满足接触条件, 收敛性有理论保证。圆柱体-面接触算例表明: IGA-BDE 方法计算精度较高。IGA-BDE 方法与 ANSYS 中的接触模型相比, 收敛性稳定, 接触迭代效率较高。由于该算法具有计算精度高、收敛性稳定的特性, 对于包含曲面接触的工程问题, 将具有较好的应用前景。

参考文献:

- [1] 孙林松, 王德信, 谢能刚. 接触问题有限元分析方法综述[J]. 水利水电科学进展, 2001, 21(3): 18—20.
Sun Songlin, Wang Dexin, Xie Nenggang. A summary of finite element analysis for contact problems [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2001, 21(3): 18—20. (in Chinese)
- [2] El-Abbasi N, Meguid S A, Czekanski A. On the modeling of smooth contact surfaces using cubic splines [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(4): 953—967.
- [3] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39/40/41): 4135—4195.
- [4] Bazilevs Y, Calo V M, Zhang Y, et al. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to

- arterial blood flow [J]. *Computational Mechanics*, 2006, 38(4/5): 310—322.
- [5] Cottrell J A, Reali A, Bazilevs Y, et al. Isogeometric analysis of structural vibrations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(41/42/43): 5257—5296.
- [6] Kiendl J, Bletzinger K U, Linhard J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198(49/50/51/52): 3902—3914.
- [7] 张勇, 林皋, 刘俊, 胡志强. 静电场分析的等几何分析方法[J]. *大连理工大学学报*, 2012, 52(6): 870—877.
Zhang Yong, Lin Gao, Liu Jun, Hu Zhiqiang. Isogeometric analysis method for electrostatic field problem [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2012, 52(6): 870—877. (in Chinese)
- [8] 葛建立, 杨国来, 吕加. 同几何分析研究进展[J]. *力学进展*, 2012, 42(6): 771—784.
Ge Jianli, Yang Guolai, Lü Jia. Advances in isogeometric analysis [J]. *Advances in Mechanize*, 2012, 42(6): 771—784. (in Chinese)
- [9] Lu J. Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(5-8): 726—741.
- [10] Temizer I, Wriggers P, Hughes T J R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(9/10/11/12): 1100—1112.
- [11] De Lorenzis L, Temizer I, Wriggers P, et al. A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 87(13): 1278—1300.
- [12] De Lorenzis L, Wriggers P, Zavarise G. A mortar formulation for 3D large deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method [J]. *Computational Mechanics*, 2012, 49(1): 1—20.
- [13] Temizer I, Wriggers P, Hughes T J R. Three-dimension mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, 209/210/211/212: 115—128.
- [14] Kim J Y, Youn S K. Isogeometric contact analysis using mortar method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 89(12): 1559—1581.
- [15] Rahman M U, Rowlands R E, Cook R D, et al. An iterative procedure for finite-element stress analysis of frictional contact problems [J]. *Computers and Structures*, 1984, 18(6): 947—954.
- [16] Klarbring A. A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction [J]. *Computer Method in Applied Mechanics Engineering*, 1986, 58(2): 175—200.
- [17] 钟万勰. 弹性接触问题的参数变分原理及参数二次规划求解[J]. *计算结构力学及其应*, 1985, 2(1): 1—9.
Zhong Wanxie. Parameter variational principle and parameter quadratic programming method for elastic contact problem [J]. *Computational Structural Mechanics and Application*, 1985, 2(1): 1—9. (in Chinese)
- [18] Leung A Y T, Chen G Q, Chen W J. Smoothing Newton method for solving two-and three-dimensional frictional contact problems [J]. *International Journal Numerical Methods in Engineering*, 1998, 41(6): 1001—1027.
- [19] Li X W, Soh Aikah, Chen W J. A new nonsmooth model for three dimensional frictional contact problem [J]. *Computational Mechanics*, 2000, 26(6): 528—535.
- [20] Christensen P, Klarbring A, Pang J S, et al. Formulation and comparison of algorithm for frictional contact problems [J]. *International Journal Numerical Methods in Engineering*, 1998, 42(1): 145—173.
- [21] Piegl L, Tiller W. *The NURBS Book* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997: 117—140.
- [22] 张勇, 林皋, 胡志强. 等几何分析方法中重控制点问题的研究与应用[J]. *工程力学*, 2013, 30(2): 1—7.
Zhang Yong, Lin Gao, Hu Zhiqiang. Repeated control points issue in isogeometric analysis and its application [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(2): 1—7. (in Chinese)
- [23] Pang J S. Newton's method for B-differentiable equations [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1990, 15(2): 311—341.
- [24] 胡志强, 林皋, 陈万吉. 用 B-可微方程组求解接触问题的一种推广[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2006, 38(2): 268—273.
Hu Zhiqiang, Lin Gao, Chen Wanji. A generalization of B-differentiable equations method for solving contact problem [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2006, 38(2): 268—273. (in Chinese)