

# 山 东 大 学

## 二〇一五年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651科目名称 数学分析

(答案必须写在答卷纸上, 写在试题上无效)

### 一、计算与证明题 (共 2 题, 每题 10 分)

1、设函数  $f(x) > 0$ , 在区间  $[0,1]$  上连续,

$$\text{试证: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n \left( f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^n} \frac{1}{n} = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x).$$

2、设函数  $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$ , 其中函数  $\varphi(x)$  于点  $a$  的邻域内有  $(n-1)$  阶的连续导数, 求  $f^{(n)}(a)$ .

### 二、证明题 (共 2 题, 每题 15 分)

1、证明: 对于任意的函数列  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, (x_0 < x < +\infty)$ , 可举出一函数  $f(x)$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 它比函数  $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$  中的每一个都增加得较快.2、设函数  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  上连续, 证明:  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0)$ .

### 三、计算题 (共 2 题, 每题 15 分)

1、计算曲面  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2), (a > 0)$  所围之体积.2、计算线积分  $\int_L x dy - y dx$ , 其中  $L^+$  为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$  与柱面  $x^2 + y^2 = x$  的交线, 从  $z$  轴正向往下看,  $L$  正向取逆时针方向.

### 四、证明题 (20 分)

证明: 若函数  $f(x, y)$  在某区域  $G$  内对变量  $x$  是连续的, 而关于  $x$  对变量  $y$  是一致连续的, 则此函数在区域  $G$  内是连续的.

### 五、计算与证明题 (共 2 题, 每题 15 分)

1、证明  $\int \left| x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right| dx$  发散.2、已知  $g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 计算  $g(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx$ .

### 六、证明题 (20 分)

证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x) \frac{x^n}{1-x^{2n}} \sin nx$  在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  内一致收敛.