山 东 大 学

二〇一六年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码 651 科目名称 数学分析

（答案必须写在答卷纸上，写在试题上无效）

一、计算与证明题（共 3 题，每题 10 分）

1、设 $S_n=\dfrac{\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}$ （其中 $C_n^k=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$ ）．求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$．

2、计算积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$．

3、设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为似序的，即 $\forall x,y$ 有 $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\ge 0$．证明：

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\le(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

二、证明题（共 2 题，每题 10 分）

1、设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$， $(0<\theta<1)$，且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$．

试证：

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

2、设 $f(0)=0$， $f(x)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 为非负的严格凸函数， $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x>0)$．试证： $f(x),F(x)$ 为严格递增的．

三、计算题（共 2 题，每题 15 分）

1、求 $\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^{\alpha-1}\dfrac{d\theta}{1+k\cos\theta}$ $(0<k<1)$．

2、试作一个函数 $f(x,y)$ 使得当 $x\to+\infty,y\to+\infty$ 时，

（1）两个累次极限存在而重极限不存在；

（2）两个累次极限不存在而重极限存在；

（3）两个累次极限与重极限都不存在；

四、证明题（20 分）

试证： $\left|\iint\limits_S f(mx+ny+pz)ds\right|\le 4\pi M$，

其中 $m^2+n^2+p^2=1$， m,n,p 为常数， $f(t)$ 在 $|t|\le 1$ 时为连续可微函数，

$f(-1)=f(1)=0$， $M=\max\limits_{-1\le t\le 1}\{|f'(t)|\}$， $S:x^2+y^2+z^2=1$．

五、计算与证明题（共 2 题，每题 15 分）

1、设 $0<x_1<\pi$， $x_n=\sin x_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n^p$ 当 $p>2$ 时收敛，当 $p\le 2$ 时发散．

2、设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{e^{-nx}}{n}$，求

（1） f 的连续范围；

（2） f 的可导范围．

六、证明题（20 分）

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数。且 $f(x)=x$， $-\pi<x<\pi$，求 $f(x)$ 与 $|f(x)|$ 的 Fourier 展开式，它们的 Fourier 级数是否一致收敛 （给出证明）？