环 $R+vR+v^2R$ 上线性码的 MacWilliams 恒等式

朱士信,黄 磊
(合肥工业大学数学学院,安徽合肥 230009)

摘 要: 通过构造 Gray 映射,对环 $R+vR+v^2R$ 上线性码进行了研究.定义了环 $R+vR+v^2R$ 上线性码的 Lee 重量及其几类重量计数器,给出了环 $R+vR+v^2R$ 上线性码及其对偶码之间的各种重量分布的 MacWilliams 恒等式.利用这些恒等式,不用求出环 $R+vR+v^2R$ 上线性码的对偶码便可得到对偶码的各种重量分布.

关键词: 线性码;Gray 映射;对偶码;重量计数器;MacWilliams 恒等式
中图分类号: TN911.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)07-1567-07
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.07.007

MacWilliams Identities of Linear Codes Over Ring $R+vR+v^2R$

ZHU Shi-xin, HUANG Lei
(*School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui* 230009, *China*)

Abstract: By constructing gray map, linear codes over ring $R+vR+v^2R$ are studied. The Lee weight and several classes of weight enumerators about linear codes over ring $R+vR+v^2R$ are defined, the MacWilliams identities of weight distributions between the linear codes and their dual codes over ring $R+vR+v^2R$ are given. According to these identities, we can get the weight distributions of dual codes directly without obtaining the dual codes of linear codes over ring $R+vR+v^2R$.

Key words: linear code; Gray map; dual code; weight enumerator; MacWilliams identity

1 引言

上世纪九十年代中期,Hammons 等人利用有限环 Z_4 上的线性码在 Gray 映射下得到了具有高纠错性能的 Prepatata 码与 Kerdock 码[1],这一发现使有限环上编码理论研究获得重大突破.自此,有限环上的码受到了广泛的研究.随后,人们又发现有限环上的线性码不仅可以用于无线通信网络中的纠错方案设计,而且可以用于构造空时码[2],这表明有限环上的纠错码具有广阔的应用前景,从而激发人们对有限环上线性码浓厚的研究兴趣.文献[3,4]研究了有限链环上的循环码和负循环码,其中给出了循环码和负循环码的结构.码的重量分布一直是编码理论研究的一个重要分支,而针对环上码的重量分布也取得了很多结果,文献[5]中研究了有限域上码的各种重量分布,给出了几类重量计数器的定义与性质;文献[6]对环 Z_4 上码的各种重量分布的 MacWilliams 恒等式进行了研究;文献[7,8]研究了环 Z_4 和 Galois 环上线性码的广义 Hamming 重量,而文献[9,10]研究了环 Z_k 和 Galois 环上线性码的 MacWilliams 恒等式;文献[11]中研究了环 F_2+uF_2 上线性码的 Lee 重量和 Hamming 重量的 MacWilliams 恒等式;文献[12]给出了环 $F_2+uF_2+u^2F_2$ 上线性码李重量分布的 MacWilliams 恒等式;文献[13]研究了环 $F_p+uF_p+u^2F_p$ 上线性码的完全重量计数和对称重量计数的 MacWilliams 恒等式.但是,对于有限非链环上码的各种重量的 MacWilliams 恒等式的研究并不太多,文献[14~16]研究了环 F_2+vF_2 和 F_p+vF_p 上线性码的各种重量的 MacWilliams 恒等式.

本文首先定义了环 $R+vR+v^2R(v^3=v)$ 上的线性码,其中 R 是极大理想为 $\langle\lambda\rangle$ 的有限链环,p 为剩余域 $R/\langle\lambda\rangle$ 的特征,且 p 为奇数.然后定义了这些线性码的 Lee 重量计数器、Hamming 重量计数器、广义对称重量计数器和完全重量计数器,最后研究了环 $R+vR+v^2R$ 上线性码线性码及其对偶码之间的各种重量分布的 MacWilliams 恒等式.这些结果为利用 $R+vR+v^2R$ 上线性码构造 R 的剩余域上的码提供了重要的理论依据,

收稿日期:2014-12-26;修回日期:2015-07-13;责任编辑:李勇锋
基金项目:国家自然科学基金(No. 61370089)

同时,它对设计 $R+vR+v^2R$ 上线性码的编码与译码算法具有直接的指导意义.

2 准备知识

设 $R=R+vR+v^2R=\{x+vy+v^2z \mid x,y,z\in R\}$,其中 $v^3=v$,R 是极大理想为 $\langle\lambda\rangle$ 的有限链环,p 为剩余域 $R/\langle\lambda\rangle$ 的特征且为奇数. 容易验证环 R 不是有限链环. 设 $\alpha_1=2^{-1}v+2^{-1}v^2$,$\alpha_2=-2^{-1}v+2^{-1}v^2$ 和 $\alpha_3=1-v^2$,易证它们是 R 中相互正交的幂等元,且 $\langle\alpha_1\rangle=\{\alpha_1x \mid x\in R\}$,$\langle\alpha_2\rangle=\{\alpha_2x \mid x\in R\}$ 和 $\langle\alpha_3\rangle=\{\alpha_3x \mid x\in R\}$ 是 R 的三个相互互素的理想,由中国剩余定理易证 $R\cong\langle\alpha_1\rangle\oplus\langle\alpha_2\rangle\oplus\langle\alpha_3\rangle$. 由此可知 R 中的任意元素可唯一表示为 $c=\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d$,其中 $a,b,d\in R$.

环 R 上长度为 n 的码 C 是 R^n 的非空子集,若 C 是 R^n 的 R-子模,则称 C 是环 R 上长度为 n 的线性码. 对 R^n 中任意的两个元素 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 和 $y=(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1})$,定义它们的内积为

$$x\cdot y=x_0y_0+x_1y_1+\cdots+x_{n-1}y_{n-1}$$

若 $x\cdot y=0$,则称 x 与 y 正交. 对环 R^n 上长度为 n 的线性码 C,其对偶码为

$$C^{\perp}=\{x \mid x\cdot y=0,\forall y\in C\}$$

若 $C=C^{\perp}$,则称 C 为自对偶码.

引理1[11] 设 C 是环 R^n 上长度为 n 的线性码,定义

$$C_1=\{a\in R^n \mid \exists b,d\in R^n,\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d\in C\},$$

$$C_2=\{b\in R^n \mid \exists a,d\in R^n,\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d\in C\},$$

$$C_3=\{d\in R^n \mid \exists a,b\in R^n,\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d\in C\},$$

则 C_1,C_2 和 C_3 为域 R 上长度为 n 的线性码,且 C 有唯一表示 $C=\alpha_1C_1\oplus\alpha_2C_2\oplus\alpha_3C_3$.

3 Gray 映射

定义 R 到 R^3 的 Gray 映射 φ 为:对任意的 $c\in R$,$\varphi(c)=(a,b,d)$,其中 $c=\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d$,$a,b,d\in R$. 由此定义 R 中元素 $c=\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d$ 的 Lee 重量为 $w_L(c)=w_H(a,b,d)$. 对于环 R 上线 φ 可以自然扩展到 R^n,定义 R^n 到 R^{3n} 的 Gray 映射为:对任意的 $c=(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})\in R^n$,

$$\Phi(c)=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},b_0,b_1,\cdots,b_{n-1},d_0,d_1,\cdots,d_{n-1})\in R^{3n}$$

其中 $c_i=\alpha_1a_i+\alpha_2b_i+\alpha_3d_i$,$a_i,b_i,d_i\in R$. 由此定义 R^n 中元素 $c=(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$ 的 Lee 重量为 $w_L(c)=\sum_{i=0}^{n-1}w_L(c_i)$,我们用 $w_i(c)$ 表示 c 中 Lee 重量为 i 的元素成分个数,其中 $0\leqslant i\leqslant 3$,显然我们有 $w_L(c)=w_H(\Phi(c))$. 对 R^n 中任意两个元素 x 和 y,其 Lee 距离记为 $d_L(x,y)=w_L(x-y)$,容易验证 Φ 是一个(R^n,Lee 距离)到(R^{3n},Hamming 距离)的保持距离不变的同构映射.

定理1 设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码,则

(1) $C^{\perp}$ 是环 R 上长度为 n 的线性码.

(2) $\Phi(C)=C_1\otimes C_2\otimes C_3$,且 $|C|=|C_1||C_2||C_3|$.

(3) $\Phi(C^{\perp})=\Phi(C)^{\perp}=C_1^{\perp}\otimes C_2^{\perp}\otimes C_3^{\perp}$,

$$C^{\perp}=\alpha_1C_1^{\perp}\oplus\alpha_2C_2^{\perp}\oplus\alpha_3C_3^{\perp}.$$

证明 (1)是显然成立的. 对任意的 $(a,b,d)\in C_1\otimes C_2\otimes C_3$,其中 $a\in C_1$,$b\in C_2$,$d\in C_3$. 由引理1可知存在 $x,y,z\in C$ 以致于 $x=\alpha_1a+\alpha_2b'+\alpha_3d'$,$y=\alpha_1a'+\alpha_2b+\alpha_3d''$ 和 $z=\alpha_1a''+\alpha_2b''+\alpha_3d$,其中 $a',a'',b',b'',d',d''\in R$. 由于 C 是线性的,我们有

$$c=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3z=\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d\in C,$$

而 $\Phi(c)=(a,b,d)\in\Phi(C)$,因此

$$\Phi(C)\supseteq C_1\otimes C_2\otimes C_3.$$

另一方面,对任意的 $(a,b,d)\in\Phi(C)$,设 $c=\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d$. 由于 Φ 是一个环同构映射,必有 $c\in C$,由引理1我们得到 $a\in C_1$,$b\in C_2$ 和 $d\in C_3$. 由此推知 $\Phi(C)\subseteq C_1\otimes C_2\otimes C_3$,因此我们有 $\Phi(C)=C_1\otimes C_2\otimes C_3$. 由于 Φ 是同构映射,则 $|C|=|\Phi(C)|=|C_1||C_2||C_3|$. 对任意的 $c=\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3d\in C$,$c'=\alpha_1a'+\alpha_2b'+\alpha_3d'\in C^{\perp}$,其中 $a,a',b,b'd,d'\in R^n$. 由 $c\cdot c'=0$,则 $a\cdot a'=b\cdot b'=d\cdot d'=0$,由此推知

$$\begin{aligned}\Phi(c)\cdot\Phi(c')&=(a,b,d)\cdot(a',b',d')\\&=a\cdot a'+b\cdot b'+d\cdot d'\\&=0\end{aligned}$$

因此 $\Phi(c')\in\Phi(C)^{\perp}$,推知 $\Phi(C^{\perp})\subseteq\Phi(C)^{\perp}$. 另一方面,我们有

$$|C^{\perp}|=|\Phi(C^{\perp})|=|R^n|/|C|=|R^{3n}|/|C|,$$

$$|\Phi(C^{\perp})|=|\Phi(C)^{\perp}|=|R^{3n}|/|\Phi(C)|=|R^{3n}|/|C|,$$

所以我们有 $\Phi(C^{\perp})=\Phi(C)^{\perp}$. 我们容易验证 $C_1^{\perp}\otimes C_2^{\perp}\otimes C_3^{\perp}\subseteq(C_1\otimes C_2\otimes C_3)^{\perp}$. 由

$$|\Phi(C^{\perp})|=|\Phi(C)^{\perp}|=|R^{3n}|/|C|,$$

$$\Phi(C)^{\perp}=(C_1\otimes C_2\otimes C_3)^{\perp},$$

$$\begin{aligned}|C_1^{\perp}||C_2^{\perp}||C_3^{\perp}|&=(R^n/|C_1|)(R^n/|C_2|)(R^n/|C_3|)\\&=|R^{3n}|/(|C_1||C_2||C_3|)=|R^{3n}|/|C|\end{aligned}$$

可知 $\Phi(C^{\perp})=(C_1\otimes C_2\otimes C_3)^{\perp}=C_1^{\perp}\otimes C_2^{\perp}\otimes C_3^{\perp}$. 由此可以推知 $C^{\perp}=\alpha_1C_1^{\perp}\oplus\alpha_2C_2^{\perp}\oplus\alpha_3C_3^{\perp}$.

推论1 设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码,则 C 是设环 R 上长度为 n 的自对偶码码当且仅当 C_1,C_2 和 C_3 均是环 R 上长度为 n 的自对偶码,当且仅当 $\Phi(C)$ 为环 R 上长度为 $3n$ 的自对偶码.

4 线性码的 MacWilliams 恒等式

设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码,用 B_i 表示 C 中

Lee 重量为 i 的码字的个数，其中 $0\leqslant i\leqslant 3n$，称 $\{B_0,B_1,\cdots,B_{3n}\}$ 为 C 的 Lee 重量分布，称

$$Lee_C(X,Y)=\sum_{i=0}^{3n}B_iX^{3n-i}Y^i$$

为 C 的 Lee 重量计数器，显然我们有 $Lee_C(X,Y)=\sum_{c\in C}X^{3n-w_L(c)}Y^{w_L(c)}$，相似的记 $\{B_0',B_1',\cdots,B_{3n}'\}$ 为 C 的对偶码 $C^{\perp}$ 的 Lee 重量分布. 称

$$Swe_C(X_0,X_1,X_2,X_3)=\sum_{c\in C}X_0^{w_0(c)}X_1^{w_1(c)}X_2^{w_2(c)}X_3^{w_3(c)}$$

为 C 的广义对称重量计数器；$w_H(c)=w_1(c)+w_2(c)+w_3(c)$，称

$$Ham_C(X,Y)=\sum_{c\in C}X^{n-w_H(c)}Y^{w_H(c)}$$

为 C 的 Hamming 重量计数器. 设 $q=|R/\langle\lambda\rangle|$，则 $|R|=q^{3l}$. 本文约定 $R=\{g_1,g_2,\cdots,g_{q^{3l}}\}$，其中 $g_1,g_2,\cdots,g_{q^{3l}}$ 互不相同，且按一定的顺序排列. 约定 $g_1=0$，对 R^n 中元素 $c=(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$，记 $n_i(c)$ 为 c 中值为 g_i 的元素成分个数，其中 $1\leqslant i\leqslant q^{3l}$，称

$$Cwe_C(X_1,X_2,\cdots,X_{q^{3l}})=\sum_{c\in C}X_1^{n_1(c)}X_2^{n_2(c)}\cdots X_{q^{3l}}^{n_{q^{3l}}(c)}$$

为 C 的完全重量计数器. 对任意的 $g_i\in R$，记 $I(i)=w_L(g_i)$，其中 $1\leqslant i\leqslant q^{3l}$.

定理 2　设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码，则下面等式成立：

(1) $Lee_C(X,Y)=Swe_C(X^3,X^2Y,XY^2,Y^3)$；

(2) $Swe_C(X_0,X_1,X_2,X_3)=Cwe_C(X_{I(1)},X_{I(2)},\cdots,X_{I(q^{3l})})$

(3) $Ham_C(X,Y)=Swe_C(X,Y,Y,Y)$；

(4) $Lee_C(X,Y)=Ham_{\Phi(C)}(X,Y)$；

(5) $Ham_C(X,Y)=Cwe_C(X,Y,\cdots,Y)$.

证明

(1) 对任意的 $c\in C$，

$n=w_0(c)+w_1(c)+w_2(c)+w_3(c)$，

$w_L(c)=w_1(c)+2w_2(c)+3w_3(c)$.

于是

$$\begin{aligned}Lee_C(X,Y)&=\sum_{c\in C}X^{3w_0(c)+2w_1(c)+w_2(c)}Y^{w_1(c)+2w_2(c)+3w_3(c)}\\&=Swe_C(X^3,X^2Y,XY^2,Y^3)\end{aligned}$$

(2) 若 $I(i)=j$，其中 $1\leqslant i\leqslant q^{3l}$，$0\leqslant j\leqslant 3$，则 $n_i(c)$ 计数于 $w_j(c)$，因此容易验证等式成立.

(3) 因为 $w_H(c)=w_1(c)+w_2(c)+w_3(c)$，则

$$\begin{aligned}Ham_C(X,Y)&=\sum_{c\in C}X^{w_0(c)}Y^{w_1(c)+w_2(c)+w_3(c)}\\&=Swe_C(X,Y,Y,Y)\end{aligned}$$

(4) 由定义可知

$$Ham_{\Phi(C)}(X,Y)=\sum_{\Phi(c)\in\Phi(C)}X^{n-w_H(\Phi(c))}Y^{w_H(\Phi(c))}.$$

因为 $w_L(c)=w_H(\Phi(c))$，而 Φ 是一个 R^n 到 R^{3n} 的同构映射，则

$$\begin{aligned}Ham_{\Phi(C)}(X,Y)&=\sum_{\Phi(c)\in\Phi(C)}X^{n-w_H(\Phi(c))}Y^{w_H(\Phi(c))}\\&=\sum_{c\in C}X^{n-w_L(c)}Y^{w_L(c)}\\&=Lee_C(X,Y)\end{aligned}$$

(5) 因为 $g_1=0$，显然

$w_H(c)=n_2(c)+n_3(c)+\cdots+n_{q^{3l}}(c)$，

则

$$\begin{aligned}Cwe_C(X,Y,\cdots,Y)&=\sum_{c\in C}X^{n_1(c)}Y^{n_2(c)+\cdots+n_{q^{3l}}(c)}\\&=\sum_{c\in C}X^{n-w_H(c)}Y^{w_H(c)}\\&=Ham_C(X,Y)\end{aligned}$$

引入三个变量 ξ_1,ξ_2 和 ξ_3 使得 $\xi_1^{\alpha_1}=\xi_2^{\alpha_2}=\xi_3^{\alpha_3}=e^{2\pi i/p}$. 对 R 中任一元素 a，可唯一地写为 $a=\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a_{j,i}\beta^i)$，其中 β 为 $R/\langle\lambda\rangle$ 中一个本原元，$a_{j,i}\in F_p$. 因此，R 中任一元素 c 唯一表示为

$$\begin{aligned}c=&\ \alpha_1\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a_{j,i}\beta^i)\\&+\alpha_2\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}b_{j,i}\beta^i)\\&+\alpha_3\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}d_{j,i}\beta^i)\end{aligned}$$

其中 $a_{j,i},b_{j,i},d_{j,i}\in F_p$，$0\leqslant i\leqslant m-1$，$0\leqslant j\leqslant l-1$.

对任意的

$$\begin{aligned}c=&\ \alpha_1\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a_{j,i}\beta^i)\\&+\alpha_2\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}b_{j,i}\beta^i)\\&+\alpha_3\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}d_{j,i}\beta^i)\in R\end{aligned}$$

定义在 R 上复值映射 θ_c 为：对任意的

$$\begin{aligned}c'=&\ \alpha_1\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a'_{j,i}\beta^i)\\&+\alpha_2\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}b'_{j,i}\beta^i)\\&+\alpha_3\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}d'_{j,i}\beta^i)\in R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_c(c')=&\ \xi_1^{\alpha_1\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a_{j,i}a'_{j,i})}\cdot\xi_2^{\alpha_2\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}b_{j,i}b'_{j,i})}\\&\cdot\xi_3^{\alpha_3\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}d_{j,i}d'_{j,i})}\end{aligned}$$

$c=1$ 时，$\theta_1(c')=\xi_1^{\alpha_1a'_{0,0}}\xi_2^{\alpha_2b'_{0,0}}\xi_3^{\alpha_3d'_{0,0}}$ 和 $\theta_1(0)=1$. 对任意的 $c',c''\in R$，容易验证

$$\theta_1(c'+c'')=\theta_1(c')\theta_1(c'').$$

将 θ_c 扩展到 R^n 上，对固定的 $c\in R^n$，定义 R^n 到 R 的复值映射 Θ_c 为：对任意的 $c'\in R^n$，$\Theta_c(c')=\theta_1(c\cdot c')$. 我们先给出下面引理.

引理 2　对任意的 $c\in R$ 和环 R 的任一非零理想 I，

有 $\sum_{c'\in I}\theta_c(c')=0.$

证明　容易验证

$$R_{r,s,t}=\langle\alpha_1\lambda^r\rangle\oplus\langle\alpha_2\lambda^s\rangle\oplus\langle\alpha_3\lambda^t\rangle$$

为环 R 的所有非零理想,其中 $0\leqslant r,s,t\leqslant l.$ 令

$$\begin{aligned}c' &= \alpha_1\sum_{j=r}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a'_{j,i}\beta^i)\\&\quad+\alpha_2\sum_{j=s}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}b'_{j,i}\beta^i)\\&\quad+\alpha_3\sum_{j=t}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}d'_{j,i}\beta^i)\in R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &= \alpha_1\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a_{j,i}\beta^i)\\&\quad+\alpha_2\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}b_{j,i}\beta^i)\\&\quad+\alpha_3\sum_{j=0}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}d_{j,i}\beta^i)\in R\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{c'\in R_{r,s,t}}\theta_c(c') &= \sum_{c'\in R_{r,s,t}}(\xi_1^{\alpha_1\sum_{j=r}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a_{j,i}a'_{j,i})}\\&\quad\cdot\xi_2^{\alpha_2\sum_{j=s}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}b_{j,i}b'_{j,i})}\\&\quad\cdot\xi_3^{\alpha_3\sum_{j=t}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}d_{j,i}d'_{j,i})})\end{aligned}$$

我们可以将其写为

$$\begin{aligned}\sum_{c'\in R_{r,s,t}}\theta_c(c') &= (\sum_{a'\in\langle\alpha_1\lambda^r\rangle}\xi_1^{\alpha_1\sum_{j=r}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}a_{j,i}a'_{j,i})})\\&\quad\cdot(\sum_{b'\in\langle\alpha_2\lambda^s\rangle}\xi_2^{\alpha_2\sum_{j=s}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}b_{j,i}b'_{j,i})})\\&\quad\cdot(\sum_{d'\in\langle\alpha_3\lambda^t\rangle}\xi_2^{\alpha_3\sum_{j=t}^{l-1}(\lambda^j\sum_{i=0}^{m-1}d_{j,i}d'_{j,i})})\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{a'\in\langle\alpha_1\lambda^r\rangle}\xi_1^{\sum_{j=r}^{l-1}(\sum_{i=0}^{m-1}\lambda^j a_{j,i}a'_{j,i})} &= \prod_{j=r}^{l-1}(\sum_{a'\in\langle\alpha_1\lambda^r\rangle}\xi_1^{\sum_{i=0}^{m-1}\lambda^j a_{j,i}a'_{j,i}})\\&= \prod_{j=r}^{l-1}(\prod_{i=0}^{m-1}(\sum_{a'_{j,i}=0}^{p-1}\xi_1^{\lambda^j a_{j,i}a'_{j,i}}))\\&= \prod_{j=r}^{l-1}\left(\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{2a_j\pi i}}{1-\mathrm{e}^{2a_j\pi i/p}}\right)\right)\\&= 0\end{aligned}$$

因此 $\sum_{c'\in I}\theta_c(c')=0.$

定理 3　设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码,则

$$\begin{aligned}&Cwe_{C^\perp}(X_1,X_2,\cdots,X_{q^{3l}})\\&=\frac{1}{|C|}Cwe_C(\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_1g_i)X_i,\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_2g_i)X_i\\&\qquad,\cdots,\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_{q^{3l}}g_i)X_i)\end{aligned}$$

证明　对任意 $c\in C$,设 $\hat{f}(c)=\sum_{c'\in R^n}\Theta_c(c')f(c')$,

$f(c)=X_1^{n_1(c)}X_2^{n_2(c)}\cdots X_{q^{3l}}^{n_{q^{3l}}(c')}$,推知

$$\hat{f}(c)=\sum_{c'\in R^n}\Theta_c(c')(X_1^{n_1(c')}X_2^{n_2(c')}\cdots X_{q^{3l}}^{n_{q^{3l}}(c')}),$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{c\in C}\hat{f}(c) &= \sum_{c\in C}\sum_{c'\in R^n}\Theta_c(c')(X_1^{n_1(c')}X_2^{n_2(c')}\cdots X_{q^{3l}}^{n_{q^{3l}}(c')})\\&= \sum_{c'\in R^n}X_1^{n_1(c')}X_2^{n_2(c')}\cdots X_{q^{3l}}^{n_{q^{3l}}(c')}\sum_{c\in C}\Theta_c(c')\end{aligned}$$

对固定的 $c'\in R^n$,若 $c'\in C^\perp$,则 $\Theta_c(c')=\theta_1(0)=1$,推知 $\sum_{c\in C}\Theta_c(c')=|C|$. 若 $c'\notin C^\perp$,容易验证集合 $\{c\cdot c'|\forall c\in C\}$ 是环 R 的一个非零理想,根据引理 2 可以得到 $\sum_{c\in C}\Theta_c(c')=0$. 因此有

$$\begin{aligned}\sum_{c\in C}\hat{f}(c) &= |C|\sum_{c'\in C^\perp}X_1^{n_1(c')}X_2^{n_2(c')}\cdots X_{q^{3l}}^{n_{q^{3l}}(c')}\\&= |C|\,Cwe_{C^\perp}(X_1,X_2,\cdots,X_{q^{3l}})\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\hat{f}(c) &= \sum_{c'\in R^n}\Theta_c(c')(X_1^{n_1(c')}X_2^{n_2(c')}\cdots X_{q^{3l}}^{n_{q^{3l}}(c')})\\&= \sum_{c'\in R^n}\theta_1(c\cdot c')(X_1^{n_1(c')}X_2^{n_2(c')}\cdots X_{q^{3l}}^{n_{q^{3l}}(c')})\end{aligned}$$

设 $c=(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$,$c'=(c'_0,c'_1,\cdots,c'_{n-1})$,其中 $c_i,c'_i\in R,0\leqslant i\leqslant n-1$,则 $\theta_1(c\cdot c')=\prod_{j=0}^{n-1}\theta_1(c_jc'_j)$,

推知

$$\begin{aligned}\hat{f}(c) &= \sum_{c'\in R^n}(\prod_{j=0}^{n-1}\theta_1(c_jc'_j)\prod_{i=1}^{q^{3l}}X_i^{n_i(c)})\\&= \sum_{c'\in R^n}(\prod_{j=0}^{n-1}(\theta_1(c_jc'_j)\prod_{i=1}^{q^{3l}}X_i^{\delta(c'_j,g_i)}))\end{aligned}$$

其中 $\delta(x,y)$ 为 Kronecker-Delta 函数. 容易验证

$$\hat{f}(c)=\prod_{j=0}^{n-1}(\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(c_jg_i)X_i),$$

而

$$\begin{aligned}&\prod_{j=0}^{n-1}(\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(c_jg_i)X_i)\\&\qquad=\prod_{j=1}^{q^{3l}}(\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_jg_i)X_i)^{n_j(c)}\end{aligned}$$

由完全重量计数器的定义可知

$$\begin{aligned}\sum_{c\in C}\hat{f}(c) &= Cwe_C(\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_1g_i)X_i,\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_2g_i)X_i\\&\qquad,\cdots,\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_{q^{3l}}g_i)X_i)\end{aligned}$$

综上所述,

$$\begin{aligned}&Cwe_{C^\perp}(X_1,X_2,\cdots,X_{q^{3l}})\\&=\frac{1}{|C|}Cwe_C(\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_1g_i)X_i,\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_2g_i)X_i\\&\qquad,\cdots,\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_{q^{3l}}g_i)X_i)\end{aligned}$$

推论 2　设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码,则

$$Ham_{C^\perp}(X,Y)=\frac{1}{|C|}Ham_C(X+(q^{3l}-1)Y,X-Y).$$

证明　由定理 2 的(5)可知 $Ham_{C^\perp}(X,Y)=Cwe_{C^\perp}(X,Y,\cdots,Y)$. 因为 $g_1=0$,若 $X_2=\cdots=X_{q^{3l}}=Y$,则

$$\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_jg_i)X_i=X-Y+Y\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_jg_i),$$

其中 $2\leqslant j\leqslant q^3$. 由引理 2 容易验证 $\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_jg_i)=0$,则可推知 $\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_jg_i)X_i=X-Y$, $2\leqslant j\leqslant q^3$. 而 $\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_jg_1)X_i=X+(q^{3l}-1)Y$,则

$$Cwe_{C^\perp}(X,Y,\cdots,Y)=\frac{1}{|C|}Cwe_C(X+(q^{3l}-1)Y,X-Y,\cdots,X-Y)$$

推知

$$Ham_{C^\perp}(X,Y)=\frac{1}{|C|}\sum_{c\in C}(X+(q^{3l}-1)Y)^{n_1(c)}\cdot(X-Y)^{n_2(c)+\cdots+n_{q^{3l}}(c)}$$

因为 $w_H(c)=n_2(c)+n_3(c)+\cdots+n_{q^{3l}}(c)$,则

$$\begin{aligned}&Ham_{C^\perp}(X,Y)\\&=\frac{1}{|C|}\sum_{c\in C}(X+(q^{3l}-1)Y)^{n-w_H(c)}(X-Y)^{w_H(c)}\\&=\frac{1}{|C|}Ham_C(X+(q^{3l}-1)Y,X-Y)\end{aligned}$$

下面研究广义对称重量计数器的 MacWilliams 恒等式,设

$$D_0=\{0\},$$
$$D_1=(\langle\alpha_1\rangle\cup\langle\alpha_2\rangle\cup\langle\alpha_3\rangle)\setminus D_0,$$
$$D_2=\begin{pmatrix}(\langle\alpha_1\rangle\oplus\langle\alpha_2\rangle)\cup(\langle\alpha_1\rangle\oplus(\langle\alpha_3\rangle)\\ \cup(\langle\alpha_2\rangle\oplus\langle\alpha_3\rangle)\end{pmatrix}\setminus(D_1\cup D_0)$$
$$D_3=R\setminus(D_2\cup D_1\cup D_0),$$

容易验证 D_j 中元素的 Lee 重量为 j,其中 $0\leqslant j\leqslant 3$. 我们先给出下面定理:

定理 4　对任意的 $g\in R$,有

(1)若 $g\in D_0$,则

$$\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(gg_i)=|D_j|,0\leqslant j\leqslant 3;$$

(2)若 $g\in D_1$,则

$$\sum_{g_i\in D_0}\theta_1(0)=1,\ \sum_{g_i\in D_1}\theta_1(gg_i)=2q^l-3,$$
$$\sum_{g_i\in D_3}\theta_1(gg_i)=-(q^l-1)^2,$$
$$\sum_{g_i\in D_2}\theta_1(gg_i)=q^{2l}-4q^l+3;$$

(3)若 $g\in D_2$,则

$$\sum_{g_i\in D_0}\theta_1(0)=1,\ \sum_{g_i\in D_3}\theta_1(gg_i)=q^l-1,$$
$$\sum_{g_i\in D_1}\theta_1(gg_i)=q^l-3,\ \sum_{g_i\in D_2}\theta_1(gg_i)=3-2q^l;$$

(4)若 $g\in D_3$,则

$$\sum_{g_i\in D_0}\theta_1(0)=1,\ \sum_{g_i\in D_1}\theta_1(gg_i)=-3,$$
$$\sum_{g_i\in D_2}\theta_1(gg_i)=3,\ \sum_{g_i\in D_3}\theta_1(gg_i)=-1.$$

证明

(1)$g\in D_0$ 时 $g=0$,则

$$\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(gg_i)=\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(0)=\sum_{g_i\in D_j}1=|D_j|,0\leqslant j\leqslant 3.$$

(2)$g\in D_1$ 时,不妨令 $g\in\langle\alpha_1\rangle\setminus\{0\}$,则

$$\begin{aligned}\sum_{g_i\in D_1}\theta_1(gg_i)&=-1+\sum_{g_i\in\langle\alpha_1\rangle}\theta_1(gg_i)+\sum_{g_i\in(\langle\alpha_2\rangle\cup\langle\alpha_3\rangle)\setminus\{0\}}\theta_1(0)\\&=-1+2(q^l-1)=2q^l-3,\end{aligned}$$

因为由引理 2 可知 $\sum_{g_i\in\langle\alpha_1\rangle}\theta_1(gg_i)=0$. 同理可验证

$$\sum_{g_i\in D_2}\theta_1(gg_i)=q^{2l}-4q^l+3,\ \sum_{g_i\in D_3}\theta_1(gg_i)=-(q^l-1)^2.$$

(3)$g\in D_1$ 时,不妨令 $g\in(\langle\alpha_1\rangle\setminus\{0\})\oplus(\langle\alpha_2\rangle)\setminus\{0\})$,

则

$$\sum_{g_i\in D_1}\theta_1(gg_i)=\sum_{g_i\in\langle\alpha_1\rangle\setminus\{0\}}\theta_1(gg_i)+\sum_{g_i\in\langle\alpha_2\rangle\setminus\{0\}}\theta_1(gg_i)+\sum_{g_i\in\langle\alpha_3\rangle\setminus\{0\}}\theta_1(0)$$

由引理 2 可知 $\sum_{g_i\in\langle\alpha_1\rangle}\theta_1(gg_i)=\sum_{g_i\in\langle\alpha_2\rangle}\theta_1(gg_i)=0$,则有 $\sum_{g_i\in D_1}\theta_1(gg_i)=-1+-1+(q^l-1)=q^l-3$. 由引理 2 易证

$$\sum_{g_i\in(\langle\alpha_1\rangle\setminus\{0\})\oplus(\langle\alpha_2\rangle\setminus\{0\})}\theta_1(gg_i)=1,$$
$$\sum_{g_i\in(\langle\alpha_2\rangle\setminus\{0\})\oplus(\langle\alpha_2\rangle\setminus\{0\})}\theta_1(gg_i)=-(q^l-1)$$
$$\sum_{g_i\in(\langle\alpha_1\rangle\setminus\{0\})\oplus(\langle\alpha_2\rangle\setminus\{0\})}\theta_1(gg_i)=-(q^l-1),$$

则我们有

$$\begin{aligned}\sum_{g_i\in D_2}\theta_1(gg_i)=&\sum_{g_i\in(\langle\alpha_1\rangle\setminus\{0\})\oplus(\langle\alpha_2\rangle\setminus\{0\})}\theta_1(gg_i)\\&+\sum_{g_i\in(\langle\alpha_1\rangle\setminus\{0\})\oplus(\langle\alpha_3\rangle\setminus\{0\})}\theta_1(gg_i)\\&+\sum_{g_i\in(\langle\alpha_2\rangle\setminus\{0\})\oplus(\langle\alpha_3\rangle\setminus\{0\})}\theta_1(gg_i)\\=&\ 3-2q^l\end{aligned}$$

同理可以验证 $\sum_{g_i\in D_3}\theta_1(gg_i)=q^l-1$. 对于(4),利用引理 2 容易验证.

定理 5　设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码,则

$$\begin{aligned}&Swe_{C^\perp}(X_0,X_1,X_2,X_3)\\&=\frac{1}{|C|}Swe_C(X_0+3(q-1)X_1+3(q^l-1)^2X_2+(q^l-1)^3X_3,\\&X_0+(2q^l-3)X_1+(q^{2l}-4q^l+3)X_2-(q^l-1)^2X_3,\\&X_0+(q^l-3)X_1+(3-2q^l)X_2+(q^l-1)X_3,\\&X_0-3X_1+3X_2-X_3)\end{aligned}$$

证明 由定理2的(2)可知

$$Swe_{C^\perp}(X_0,X_1,X_2,X_3)=Cwe_{C^\perp}(X_{I(1)},X_{I(2)},\cdots,X_{I(q^{3l})})$$

根据定理3可知

$$Swe_{C^\perp}(X_0,X_1,X_2,X_3)$$
$$=\frac{1}{|C|}Cwe_C(\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_1g_i)X_{I(i)},$$
$$\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_2g_i)X_{I(i)},\cdots,\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_{q^{3l}}g_i)X_{I(i)})$$

因为 $\sum_{i=1}^{q^{3l}}\theta_1(g_sg_i)X_{I(i)}=\sum_{j=0}^{3}\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(g_sg_i)X_j$,

其中 $1\leqslant s\leqslant q^{3l}$,则

$$Swe_{C^\perp}(X_0,X_1,X_2,X_3)$$
$$=\frac{1}{|C|}Cwe_C(\sum_{j=0}^{3}\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(g_1g_i)X_j,\sum_{j=0}^{3}\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(g_2g_i)X_j,$$
$$\cdots,\sum_{j=0}^{3}\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(g_{q^{3l}}g_i)X_j)$$

因为 $|D_0|=1$, $|D_1|=3(q^l-1)$, $|D_2|=3(q^l-1)^2$, $|D_3|=(q^l-1)^3$ 和 D_j 中元素的 Lee 重量为 j,其中 $0\leqslant j\leqslant 3$,利用定理4可以推知

$$Cwe_C(\sum_{j=0}^{3}\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(g_1g_i)X_j,\sum_{j=0}^{3}\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(g_2g_i)X_j,$$
$$\cdots,\sum_{j=0}^{3}\sum_{g_i\in D_j}\theta_1(g_{q^{3l}}g_i)X_j)$$
$$=(X_0+3(q^l-1)X_1+3(q^l-1)^2X_2+(q^l-1)^3X_3)^{w_0(c)}$$
$$(X_0+(2q^l-3)X_1+(q^{2l}-4q^l+3)X_2$$
$$-(q^l-1)^2X_3)^{w_1(c)}(X_0+(q^l-3)X_1+(3-2q^l)X_2$$
$$+(q^l-1)X_3)^{w_2(c)}(X_0-3X_1+3X_2-X_3)^{w_3(c)}$$
$$=Swe_C(X_0+3(q^l-1)X_1+3(q^l-1)^2X_2+(q^l-1)^3X_3,$$
$$X_0+(2q^l-3)X_1+(q^{2l}-4q^l+3)X_2-(q^l-1)^2X_3,$$
$$X_0+(q^l-3)X_1+(3-2q^l)X_2+(q^l-1)X_3,$$
$$X_0-3X_1+3X_2-X_3)$$

因此

$$Swe_{C^\perp}(X_0,X_1,X_2,X_3)$$
$$=\frac{1}{|C|}Swe_C(X_0+3(q-1)X_1+3(q^l-1)^2X_2+(q^l-1)^3X_3,$$
$$X_0+(2q^l-3)X_1+(q^{2l}-4q^l+3)X_2-(q^l-1)^2X_3,$$
$$X_0+(q^l-3)X_1+(3-2q^l)X_2+(q^l-1)X_3,$$
$$X_0-3X_1+3X_2-X_3)$$

注 由定理2的(3)可知

$$Ham_{C^\perp}(X,Y)=Swe_{C^\perp}(X,Y,Y,Y),$$

利用定理5我们可以得到

$$Ham_{C^\perp}(X,Y)$$
$$=\frac{1}{|C|}Swe_C(X+3(q^l-1)Y+3(q^l-1)^2Y+(q^l-1)^3Y,$$
$$X_0+(2q^l-3)Y+(q^{2l}-4q^l+3)Y-(q^l-1)^2Y,$$
$$X+(q^l-3)Y+(3-2q^l)Y+(q^l-1)Y,$$
$$X-3Y+3Y-Y),$$

化简得到

$$Ham_{C^\perp}(X,Y)$$
$$=\frac{1}{|C|}Swe_C(X+(q^{3l}-1)Y,X-Y,X-Y,X-Y)$$
$$=\frac{1}{|C|}Ham_C(X+(q^{3l}-1)Y,X-Y)$$

这与推论2一致.

推论3 设 C 是环 R 上长度为 n 的线性码,则

$$Lee_{C^\perp}(X,Y)=\frac{1}{|C|}Lee_C(X+(q^l-1)Y,X-Y)$$

证明 根据定理2可知

$$Lee_{C^\perp}(X,Y)=Swe_{C^\perp}(X^3,X^2Y,XY^2,Y^3)$$

再利用定理5容易验证.

例 设 C 是环 $F_3+vF_3+v^2F_3$ 上长度为2的线性码,且 $C=\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$,容易得知 C 的 Lee 重量分布为 $B_0=1$, $B_6=2$. 下面利用上面的理论来求 $C^\perp$ 的 Lee 重量分布.

(1)显然 $Lee_C(X,Y)=X^6+2Y^6$,由推论3可知

$$Lee_{C^\perp}(X,Y)=\frac{1}{|C|}Lee_C(X+2Y,X-Y)$$
$$=\frac{1}{3}((X+2Y)^6+2(X-Y)^6)$$

化简为

$$Lee_{C^\perp}(X,Y)=X^6+30X^4Y^2+40X^3Y^3$$
$$+90X^2Y^4+60XY^5+22Y^6$$

因此 $C^\perp$ 的 Lee 重量分布为

$B_0'=1$, $B_1'=0$, $B_2'=30$, $B_3'=40$,

$B_4'=90$, $B_5'=60$, $B_6'=22$

(2) $Swe_C(X_0,X_1,X_2,X_3)=X_0^2+2X_3^2$,由定理5可知

$$Swe_{C^\perp}(X_0,X_1,X_2,X_3)=\frac{1}{3}((X_0+6X_1+12X_2+8X_3)^2$$
$$+2(X_0-3X_1+3X_2-X_3)^2)$$

则

$$Lee_{C^\perp}(X,Y)=Swe_{C^\perp}(X^3,X^2Y,XY^2,Y^3)$$
$$=\frac{1}{3}((X^3+6X^2Y+12XY^2+8Y^3)^2$$
$$+2(X^3-3X^2Y+3XY^2-Y^3)^2)$$

化简为

$$Lee_{C^\perp}(X,Y)=X^6+30X^4Y^2+40X^3Y^3$$
$$+90X^2Y^4+60XY^5+22Y^6$$

与第一种方法相符.

5 结束语

本文研究有限环 $R+vR+v^2R$ 上线性码的各种重量计数器,其中R是特征为奇素数方幂的有限链环,给出了环 $R+vR+v^2R$ 上线性码线性码及其对偶码之间的各

种重量分布的 MacWilliams 恒等式. 本文研究结果不仅为探索 $R+vR+v^2R$ 上线性码的码字结构提供了重要的方法,而且也为计算 $R+vR+v^2R$ 上线性码译码误码率提供重要的依据. 如何利用得到的 $R+vR+v^2R$ 上线性码的各种 MacWilliams 恒等式,设计编码与译码算法是一个值得探索的问题.

参考文献

[1] Hammons J A R, Kumar P V, Calderbank A R, et al. The Z_4 - linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1994, 40 (2): 301 - 319.

[2] Tarokh V, Seshadri N, Calderbank A R. Space-time codes for high data rate wireless communication: Performance criterion and construction[J]. IEEE Transactions Information Theory, 1998, 44: 744 - 765.

[3] Dinh H Q, López-Permouth S R. Cyclic and negacyclic codes over finite chain rings[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 50(8): 1728 - 1744.

[4] Hu Peng, Li Hui, Liu Xiusheng. The generator polynomials of cyclic and negecyclic codes over finite chain ring[J]. Mathematics in Picture and Theory, 2011, 41 (2): 217 - 221.

[5] MacWilliams F J, Sloane N J A. The Theory of Error-Correcting Codes[M]. Elsevier, 1977.

[6] Wan Zhexian. Quaternary Codes[M]. Singapore: World Scientic Pub Co, 1997. 25 - 70.

[7] Ashikhmin A E. Generalized Hamming weights for Z_4 - linear codes[A]. Proceedings of 1994 IEEE International Symposium on Information Theory[C]. IEEE, 1994. 306 - 306.

[8] Ashikhmin A E. On generalized Hamming weights for Galois ring linear codes[J]. Designs, Codes and Cryptography, 1998, 14(2): 107 - 126.

[9] 朱士信. Z_k 线性码的对称形式的 MacWilliams 恒等式[J]. 电子与信息学报, 2003, 25(7): 901 - 906.
Zhu Shixin. A symmetrized MacWilliams identity of Z_k-linear code[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2003, 25(7): 901 - 906. (in Chinese)

[10] Wan Zhexian. The MacWilliams identity for linear codes over Galois rings[A]. Numbers Information and Complexity[C]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000. 333 - 338.

[11] 余海峰, 朱士信. 环 F_2+uF_2 上线性码及其对偶码的 MacWilliams 恒等式[J]. 中国科学技术大学学报, 2006, 36(2): 1285 - 1288.

[12] 梁华, 唐元生. 环 $F_2+uF_2+u^2F_2$ 上线性码的 MacW-illiams 恒等式[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(23): 200 - 205.

[13] 许小芳, 毛琪莉. 环 $F_p+uF_p+u^2F_p$ 上线性码的 MacWilliams 恒等式[J]. 数学杂志, 2013, 33(3): 519 - 524.

[14] 施敏加, 朱士信, 李平. 环 F_2+vF_2 上线性码的 MacWilliams 恒等式[J]. 计算机应用研究, 2008, 25(4): 1134 - 1135.

[15] 刘修生, 刘花璐. 环 F_p+vF_p 上线性码的 MacWilliams 恒等式[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, (12): 61 - 65.

[16] 施敏加, 杨善林. 非主理想环 F_p+vF_p 上线性码的 MacWilliams 恒等式[J]. 电子学报, 2011, 39(10): 2449 - 2453.
Shi Minjia, Yang Shanlin. Macwilliams identities of linear codes over non-principal ideal ring F_p+vF_p[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(10): 2449 - 2453. (in Chinese)

作者简介

朱士信 男, 1962 年生于安徽枞阳. 教授、博士生导师. 合肥工业大学数学学院院长, 中国密码学会理事, 安徽省数学会副理事长. 研究方向为代数编码与密码、非线性移位寄存器等.
E-mail: zhushixin@hfut.edu.cn

黄　磊 男, 1989 年生于江西上高. 2015 年毕业于合肥工业大学, 硕士. 研究方向为代数编码与密码.
E-mail: 18756096707@163.com