电子科技大学
2015 年攻读硕士学位研究生入学考试试题
考试科目: 601 数学分析

注： 所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、 填空题(**每小题** 5 **分，共** 40 **分**)

1. 设 a_1,a_2,a_3,a_4 均为正实数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+a_3^{\frac{1}{x}}+a_4^{\frac{1}{x}}}{4}\right)^{4x}=$ ________________________.

2. 如果 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(ax+b), & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则 $a=$ __________，$b=$ __________.

3. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[x\sin^4 x+\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x=$ ____.

4. 交换累次积分的次序 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y=$ ____.

5. 设 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，则其全微分 $\mathrm{d}f=$ ____.

二、计算题（每小题 7 **分，共** 14 **分）**

1．已知 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

2．求椭球面 $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 上的点，使其法线与三个坐标轴正方向成等角.

三、计算题（每小题 8 **分，共** 16 **分）**

1．求函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ 的极值点与极值；

2．计算 $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}\sin\sqrt{y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sin\sqrt{z^2+x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leq z\leq h)$ 的上侧.

四、（16 分） 证明：$\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(\eta,1)\ (0<\eta<1)$ 上一致连续，但在 $(0,1)$ 上不一致连续.

五、（12 分） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 存在二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)>0$，其中 $a<c<b$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

六、（12 分） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)|\geq c>0$（c 为常数），证明：$\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

七、（12 分）证明：函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)2n}$在区间$[0,1]$上一致收敛.

八、（15 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的和函数，并指出其定义域.

九、（12 分）设一元函数$f(u)$在区间$[-1,1]$上连续，证明：

$$\iiint_{\Omega} f(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)\,\mathrm{d}u\text{，}$$

其中Ω为单位球体$x^2+y^2+z^2\le 1$.

十、（16 分）用闭区间套定理证明：非空且有上界的数集必有上确界.