电子科技大学

2015年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：835 线性代数

注意事项：所有答案必须写在答卷纸上，否则答案无效。

一(10分) 求 $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ 的根.

二(20分) (不写计算过程)试写出4个实矩阵 A, B, C, D 使得

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;　　(2) $B^2 - 2B + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = O$;　　(3) $C^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

(4) $D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \end{pmatrix}$.

三(15分) 设 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 是全体2阶实矩阵所构成的线性空间, 问 a 满足什么条件时,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一组基.

四(15分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ a-1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 试求 a 的取值范围.

五(20分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, B 是3阶非零矩阵且满足 $BA = O$. 如果矩阵 B 的第1列是 $(1, 2, -3)^T$, 求矩阵 B.

六(20分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

(1) 求可逆矩阵 C 使得 $C^T AC = B$;

(2) 如果 $A + kI$ 与 B 合同, 求 k 的取值范围, 这里 I 是3阶单位矩阵.

七(20 分). 设 n 阶实矩阵 A 满足 $A^2-3A+2I=O$.

(1) 证明 A 的特征值均大于 0;

(2) 是否存在可逆实矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵? 为什么?

八(15 分). 设 $\boldsymbol{A}$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的正交变换, $\alpha\in\mathbf{R}^n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的某个特征值 λ 的特征向量, 证明: $\lambda=1$ 或 -1.

九(15 分). 设 A, B 都是 n 阶非零实方阵. 证明存在列向量 $\alpha\in\mathbf{R}^n$ 使得 $A\alpha, B\alpha$ 都不是零向量.