电子科技大学

2016 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：688 单独考试高等数学

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、选择题（每小题 4 分，共 32 分，只有一项符合题目要求）

1. 设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sin\pi x}$，则 $f(x)$ 的一个可去间断点为 ······································（　　）.

(A) $x=0$；　(B) $x=1$；　(C) $x=2$；　(D) $x=n\ (n\in N_+)$.

2. 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ ··（　　）.

(A) $xf(x^2)$；　(B) $-xf(x^2)$；　(C) $2xf(x^2)$；　(D) $-2xf(x^2)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义且在某邻域可导，则 $f(0)$ 为极小值的充分条件是······（　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=1$；　(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=1$；　(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x^2}=-1$；　(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$.

4. 设 e^x 与 x 是三阶常系数齐次线性方程 $y'''+ay''+by'+cy=0$ 的两个解，则······（　　）.

(A) $a=0,b=1,c=0$；(B) $a=1,b=1,c=0$；(C) $a=1,b=0,c=0$；(D) $a=1,b=0,c=1$.

5. 设有曲面 S：$z=x+f(y-z)$，其中 f 可导，则该曲面在任一点处的切平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $(1,1,1)$ 的夹角为 ··（　　）.

(A) 0；　(B) $\dfrac{\pi}{4}$；　(C) $\dfrac{\pi}{3}$；　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

6. 交换积分次序：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{9-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$ ························（　　）.

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^{2\sqrt2}\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(C) $\int_0^{\frac12}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^2\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(D) $\int_0^{\frac12}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac12}^{2\sqrt2}\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{9-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

7. 设曲线 L 的方程为 $4x^2+y^2=4$（顺时针方向），则 $\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=$ ················（　　）.

(A) 0；　(B) π；　(C) $-\pi$；　(D) $-\dfrac{\pi}{2}$.

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛，则下列级数收敛的是…………………………… (　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^2-u_{n+1}^2)$；　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$；　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$；　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$.

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=$____________.

2. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x=$____________.

3. 设 $x=x(t)$ 是由方程 $t-\int_1^{x+t}e^{-u^2}\mathrm{d}u=0$ 所确定的函数，则 $x'(0)=$___________.

4. 曲线 $x=\cos t,\ y=e^t,\ z=t^2+1$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法平面方程为____________.

5. 设 S 是 xOy 平面上满足 $4x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ 的部分，则曲面积分

$\iint_S (2-4x-y-z)\mathrm{d}S=$____________.

6. 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=1-\cos\theta(0\le\theta\le 2\pi)$，$L$ 的线密度为 $\rho=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$，则曲线 L 的质量为___________.

三、（10 分）设连续非负函数 $f(x)$ 满足 $f(x)f(-x)=1\ (-\infty<x<+\infty)$，求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x$.

四、（10 分）确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+c-\sqrt{x^2+2x+4}}{x^2}=0$.

五、（11 分）求微分方程 $y''+y=\sin x$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的特解.

六、（10 分）设函数 $f(x,y)$ 具有连续一阶偏导数，$f(1,1)=1,\ f_1(1,1)=a,\ f_2(1,1)=b$，又 $\Phi(x)=f\{x,f[x,f(x,y)]\}$，求 $\Phi(1),\ \Phi'(1)$.

七、（11 分）计算三重积分 $\iiint_V f(x,y,z)dV$，其中 $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2, & z>\sqrt{x^2+y^2},\\ x^2+y^2, & 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2},\\ x^2+y^2+z^2, & z<0. \end{cases}$$

八、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$ 的收敛区间及和函数.

九、（10 分）计算曲面积分 $\iint_S \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=1\ (-1\le z\le 1)$，

取外侧,

十、(12 分)在变力 $\boldsymbol{F} = yz\,\boldsymbol{i} + zx\,\boldsymbol{j} + xy\,\boldsymbol{k}$ 的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$,问 ξ,η,ζ 取何值时,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 $\boldsymbol{W}$ 最大?并求出功 $\boldsymbol{W}$ 的最大值.

十一、(10 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})<0$,证明:$\int_0^1 f(x^{n-1})dx \le f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $(n=2,3,4,\cdots)$.