第七章　整数规划（I.P.）

虽然用途广泛，但经常地，客观上要求L.P. 模型最优解中不能含有非整数值（如股票、房屋的购买决策等），整数规划可用来帮助求解这类问题

本章重点：0-1 规划的灵活应用

模型的分枝定界算法

第一节　I.P. 概念和应用

一、I.P. 概念

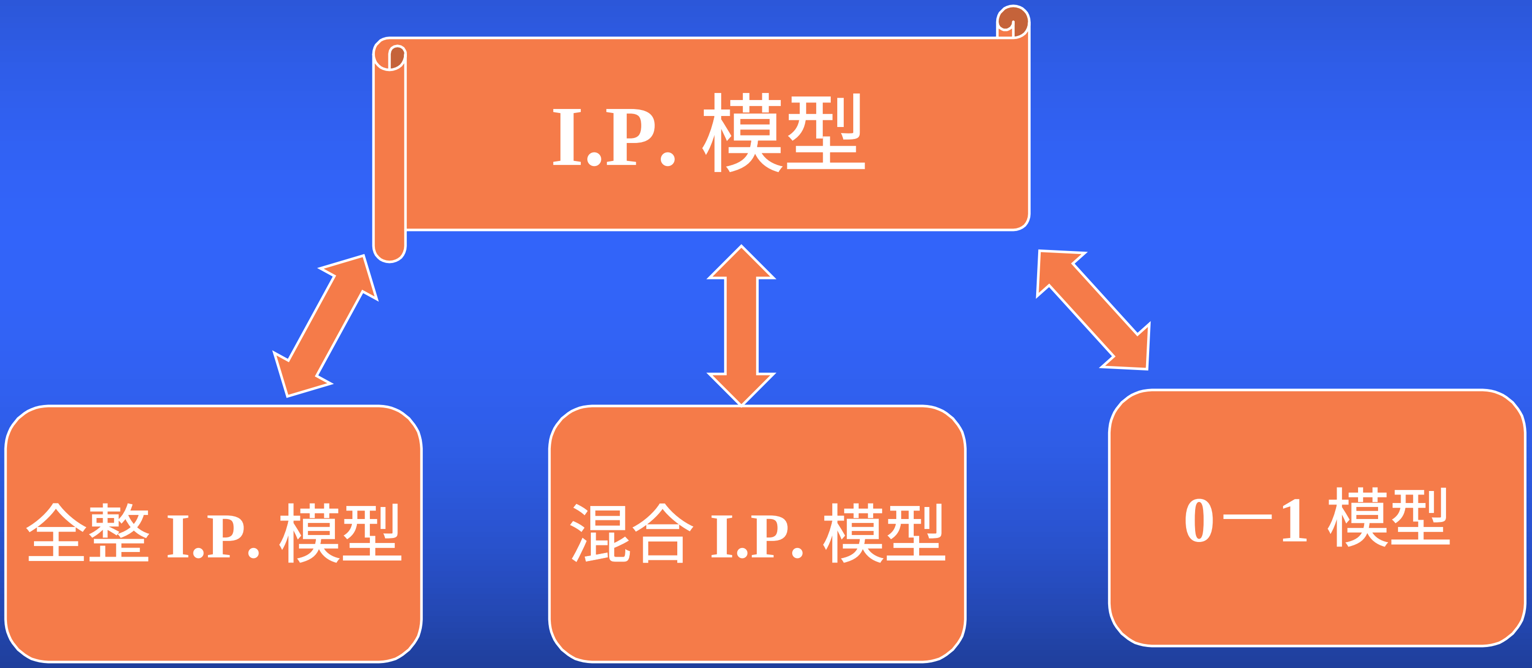
什么是 I.P. ？
Integral Programming

I.P. 模型的必要性
及其灵活性

I.P. 模型的不利因素：
求解困难 ＋ 解不稳定

第一节 I.P. 概念和应用

二、I.P. 模型分类



I.P. 模型

全整 I.P. 模型

混合 I.P. 模型

0—1 模型

I.P. 的 L.P. 松弛：I.P.求解 → L.P.求解 ＋ 逻辑思维

第一节　I.P. 概念和应用

三、I.P. 模型的应用

1、资金预算问题（capital budgeting）

假定 I.C. 公司要对今后四年的一些投资项目进行资金管理

目标：选择能得到最大预期收入的项目并对资金作出预算规划，有关数据如下：

可选项目	预期收入	资金需求预测 第一年	第二年	第三年	第四年
x1　厂房扩建	90,000	15,000	20,000	20,000	15,000
x2　仓库扩建	40,000	10,000	15,000	20,000	5,000
x3　购新机器	10,000	10,000	0	0	4,000
x4　新品开发	37,000	15,000	10,000	10,000	10,000
各年可用资金额		40,000	50,000	40,000	35,000

第一节　I.P. 概念和应用

三、I.P. 模型的应用

1、资金预算问题（**0－1 模型**

ma

灵活性？

40

…… …. …. (年可用资金限制)

$15x_1 + 5x$　$4x_3 +$　$0x_4 \leqslant 35$

$\mathbf{x_i = 0, \ 1}$

最优解：　$x_1 = x_2 = x_3 = 1$,　$x_4 = 0$,　o.f. = 140,000 （可行）

第一节 I.P. 概念和应用

三、I.P. 模型的应用

2、配送系统设计问题（distribution system design）

1）运输问题 **L.P. 模型一般形式** （假定 ΣS = ΣD）

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$ 一成本最小化

s.t.

$\sum x_{ij} \leqslant S_i$ (i = 1,2,....m) 一供方固定

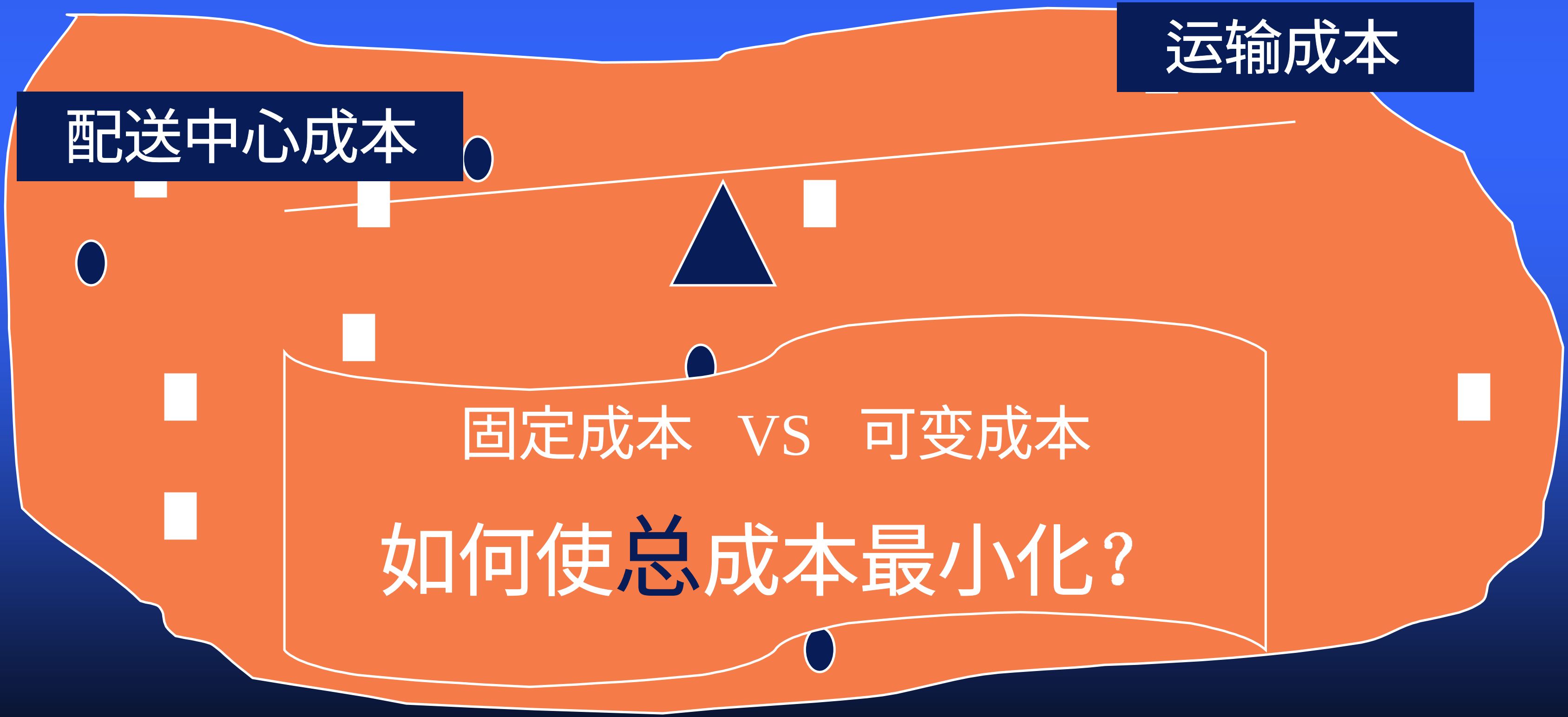
$\sum x_{ij} = D_j$ (j = 1,2 .... n) 一需方

$x_{ij} \geqslant 0$ (i = 1....m, j = 1 .... n)

第一节　I.P. 概念和应用

2、配送系统设计问题

2）配送系统及其成本矛盾



固定成本　VS　可变成本

如何使**总**成本最小化？

第一节 I.P. 概念和应用

2、配送系统设计问题

3）建模

$$\min \sum \sum c_{ij} x_{ij} + \sum f_i y_i$$

s.t.

$$\sum x_{ij} \leqslant S_i y_i \qquad (i = 1\ldots\ldots m)$$

$$\sum x_{ij} = D_j \qquad (j = 1\ldots\ldots n)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i = 1\ldots\ldots m,\ j = 1\ldots\ldots n)$$

$$y_i = 0 \text{ or } 1 \qquad (i = 1\ldots m)$$

4）系统调节

$$y_1 + y_2 \leqslant 1$$

第一节 I.P. 概念和应用

3、派出机构（手机基站、展馆监控器）的设定

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

一、问题和模型（全整 I.P.）

某不动产投资公司拟投资 1,365,000 元用于购买 x_1 幢别墅和 x_2 幢公寓，考虑到售价、物业管理能力、租赁利润等因素，得到以下模型：（单位：1000）

$$\max \ 2x_1 + 3x_2 \qquad \text{——利润}$$

s.t.

$$195x_1 + 273x_2 \leqslant 1365 \qquad \text{——资金}$$

$$4x_1 + 40x_2 \leqslant 140 \qquad \text{——物业能力}$$

$$x_1 \leqslant 4 \qquad \text{——可购量}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0,$$ **整数**

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

二、图解法及其启示

1、化成 **L.P. 松弛**、新引出的问题

原问题 L.P. 松弛

$x_1 = 2.44$

$x_2 = 3.26$

o.f. = 14.66

o.f.减少

10％以上

取整后得：可行解

$x_1 = 2$

$x_2 = 3$

o.f. = 13

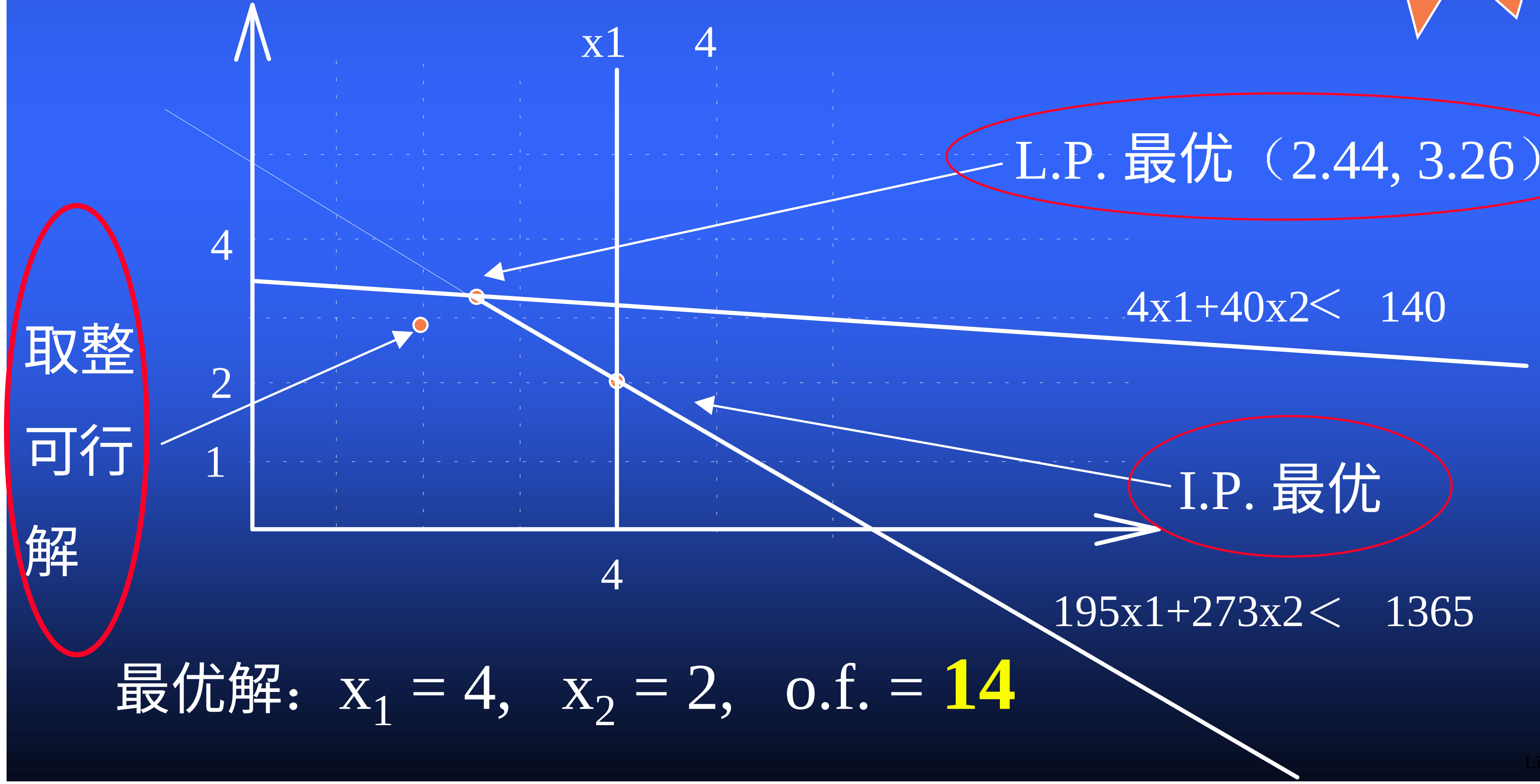
最优？？

第二节　I.P. 的分枝定界求解法

二、图解法及其启示

三个解

2、图解法



L.P. 最优（2.44, 3.26）

I.P. 最优

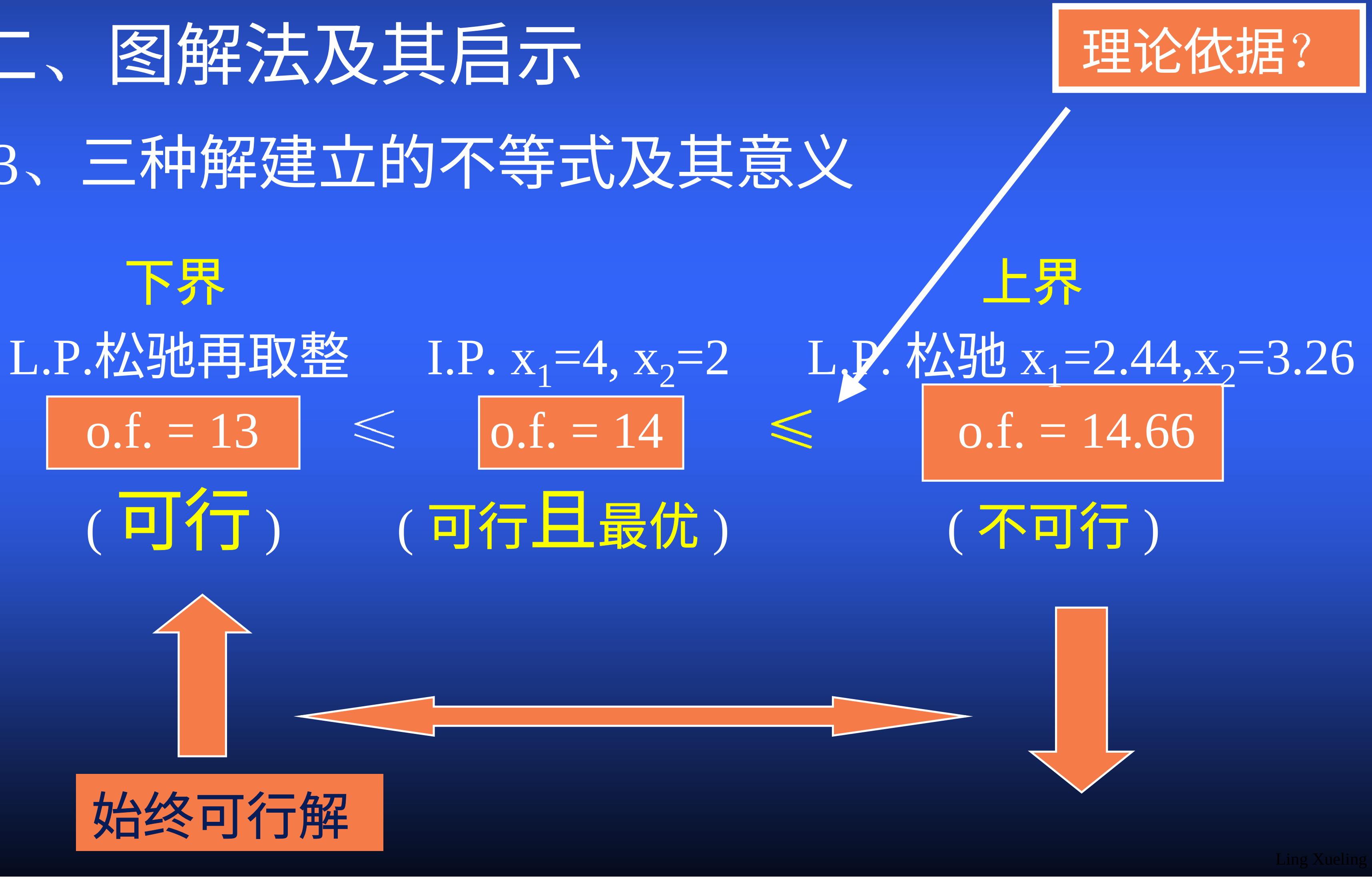
取整可行解

最优解：$x_1 = 4$,　$x_2 = 2$,　o.f. = **14**

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

二、图解法及其启示

3、三种解建立的不等式及其意义



理论依据?

下界

上界

L.P.松弛再取整

I.P. $x_1=4$, $x_2=2$

L.P. 松弛 $x_1=2.44, x_2=3.26$

o.f. = 13 $\leqslant$ o.f. = 14 $\leqslant$ o.f. = 14.66

(可行)

(可行且最优)

(不可行)

始终可行解

第二节　I.P. 的分枝定界求解法

二、图解法及其启示

4、定理一

任一 max 全整
或混合整 I.P.
之最优解值

≤

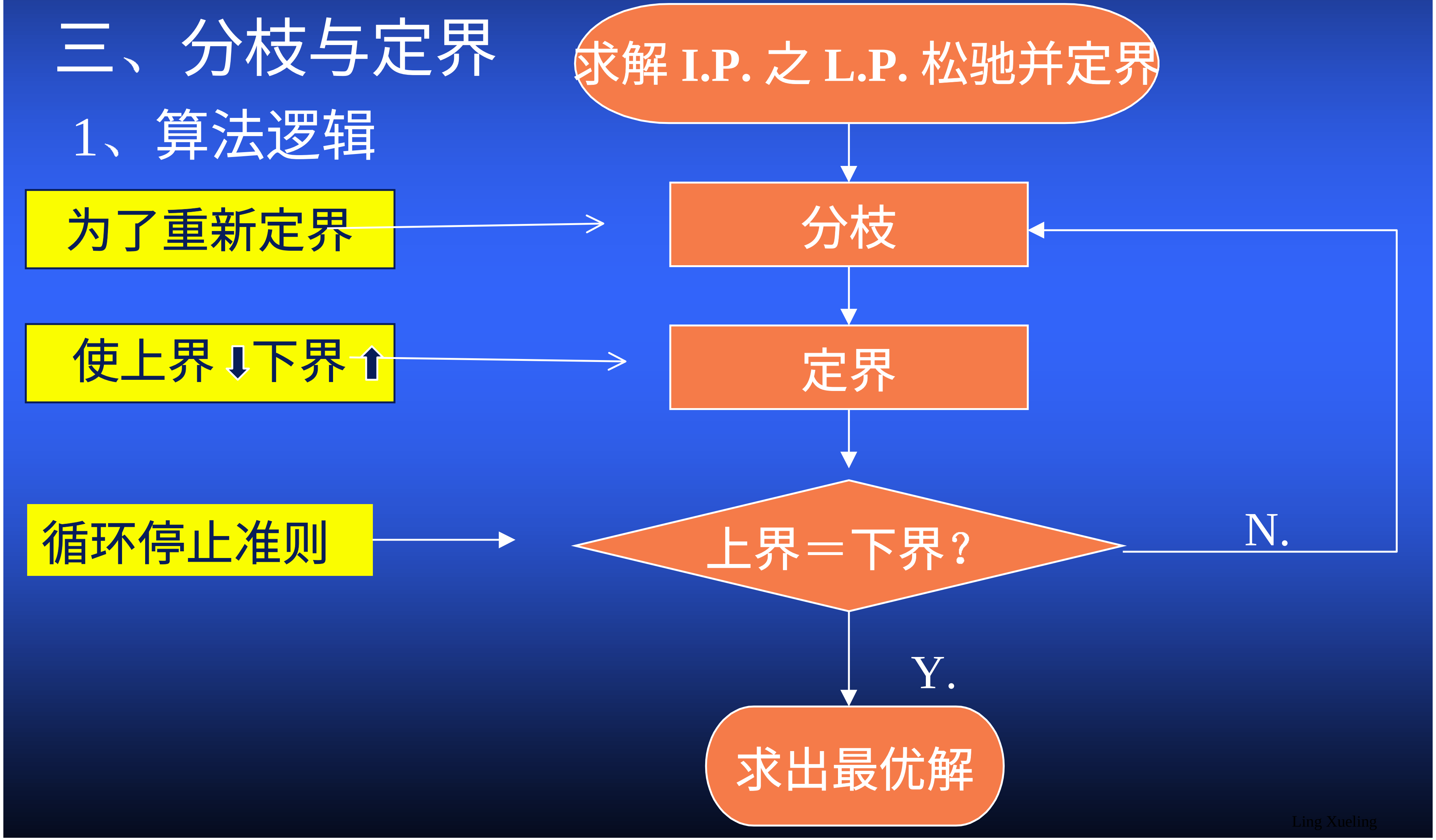
对应的 L.P.
松弛最优解值

注：对 min 问题，只需将 “≤” 改成 “≥” 。

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

三、分枝与定界

1、算法逻辑



求解 I.P. 之 L.P. 松弛并定界

分枝

定界

上界＝下界？

N.

Y.

求出最优解

为了重新定界

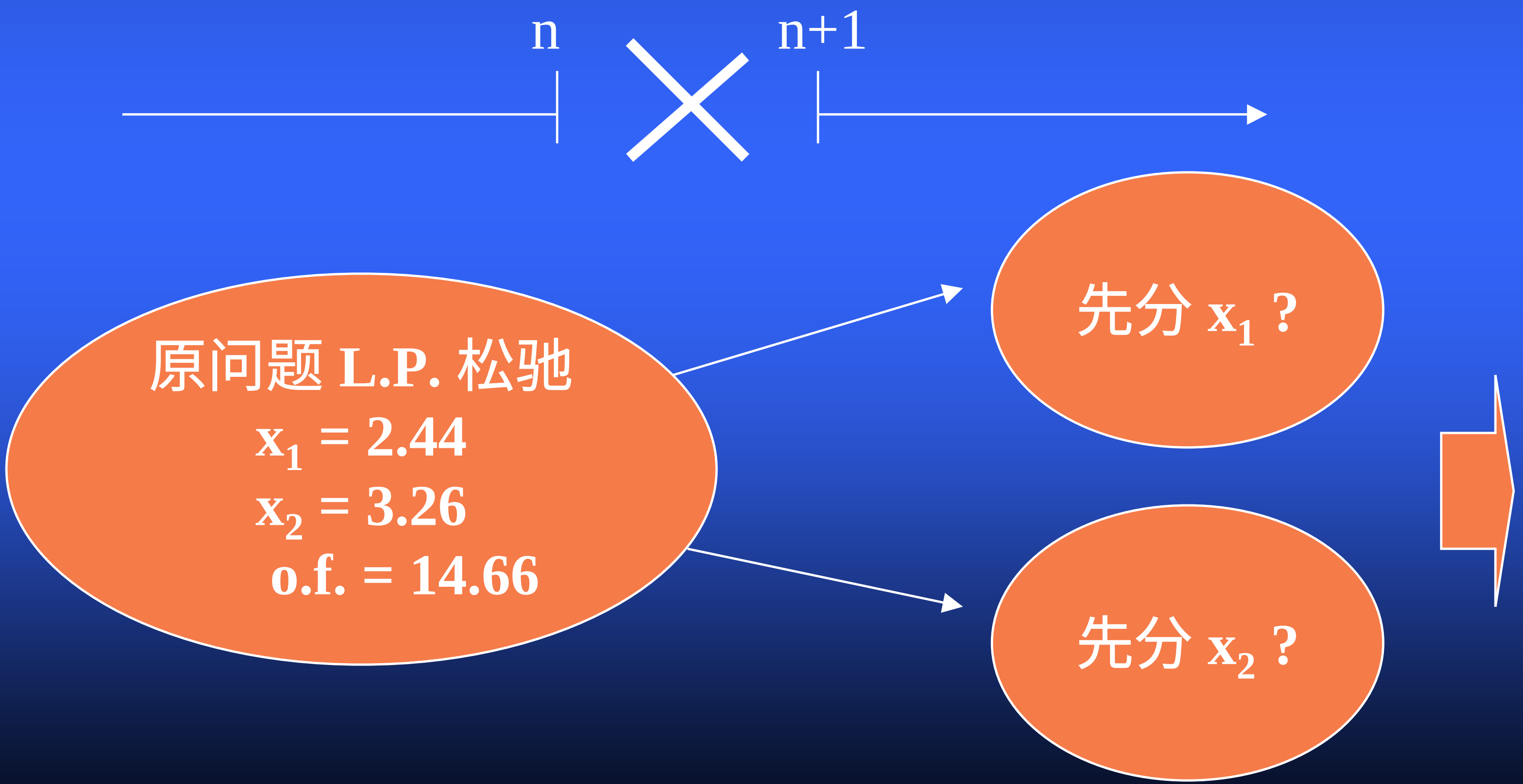
使上界↓下界↑

循环停止准则

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

三、分枝与定界

2、如何分枝？



原问题 L.P. 松弛
$x_1 = 2.44$
$x_2 = 3.26$
o.f. = 14.66

先分 x_1 ?

先分 x_2 ?

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

三、分枝与定界

3、I.P. 模型 性的

I.P. 最优解对系

例如：

因为敏感，为提高效率，应当先考虑 x_1

$16x_1 +$ ... ≤ 1 ---- 可用资金

x_1, x_2, x_3, x_4 ... r 1

最优解： $x_1 = x_2 = x_3 = 1,$ ... $_4 = 0,$ o... $= 170$

若调整可用资金：100→10，则最优解变成：$x_1 = x_4 = 1, x_2 = x_3 = 0$, o.f. = 200， Δof = 30 ——利润竟增加 30 元——**皆因可行域是孤立点所致**。

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

三、分枝与定界

4、第一 枝 + 定

哪里再分枝？？

m

s.t.

$195x_1 + 2$

$4x$

$\leq$

$\mathbf{x_1}$

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 = 2, x_2 = 3.3$ o.f. = **13.9**

$\leq$ 14

$\leq$ 4

$\mathbf{x_1}$ $\geq$ **3**

$x_1, x_2 \geq 0$

$x_1 = 3, x_2 = 2.86$ o.f. = **14.58**

新上界 ＝ **14.58** ≠ 新下界 ＝ **13**

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

三、分枝与定界

6、第二次分枝 + 定界

$\max\ 2x_1 + 3x_2$

s.t.

$195x_1 + 273x_2 \leqslant 1365$

$4x_1 + 40x_2 \leqslant 140$

$x_1 \leqslant 4$

$\mathbf{x_1 \geq 3}$

$\mathbf{x_2 \leqslant 2}$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

$x_1 = 4,\ x_2 = 2$ o.f. = 14

$\max\ 2x_1 + 3x_2$

s.t.

$195x_1 + 273x_2 \leqslant 1365$

$4x_1 + 40x_2 \leqslant 140$

$x_1 \leqslant 4$

$\mathbf{x_1 \geq 3}$

$\mathbf{x_2 \geq 3}$

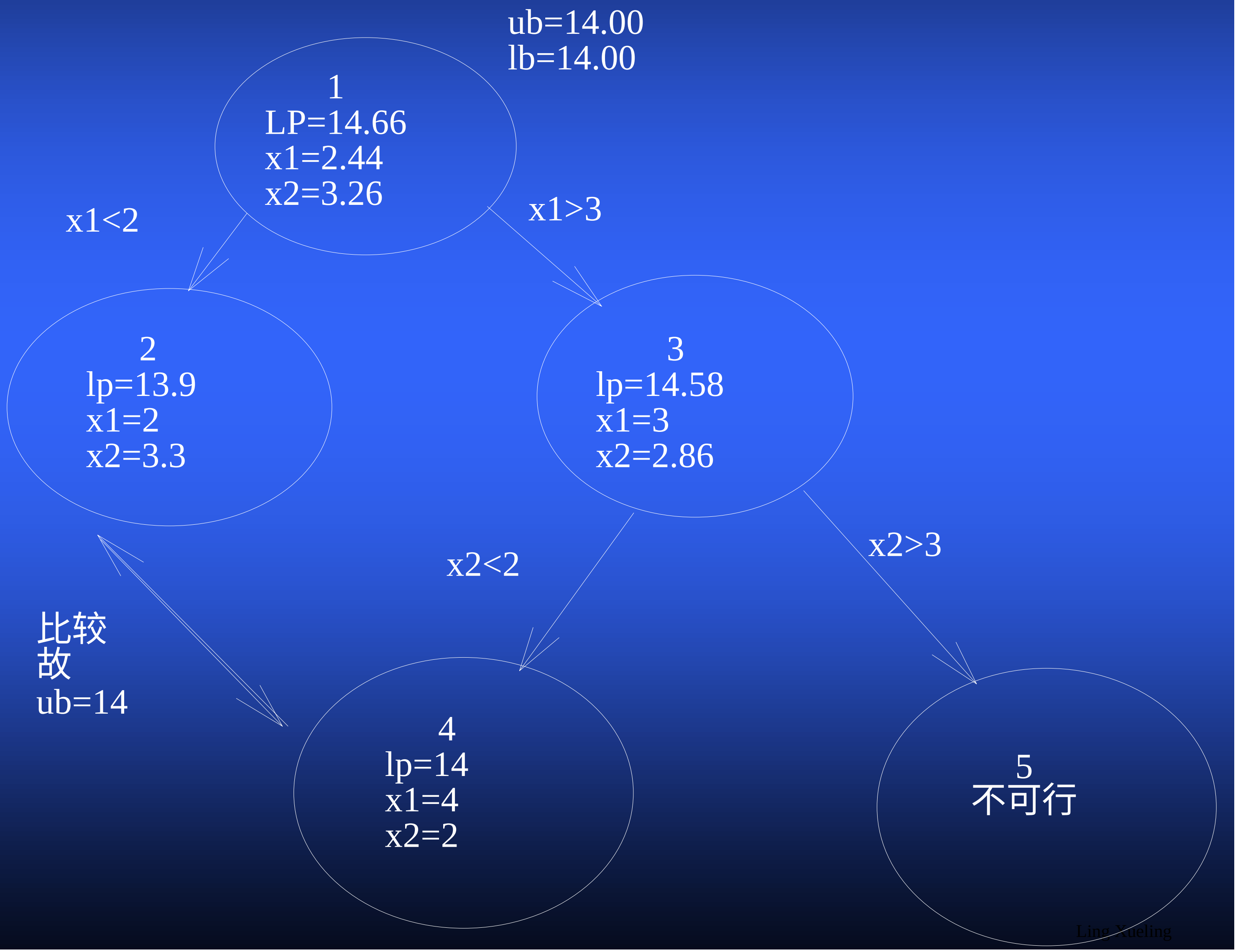
$x_1, x_2 \geqslant 0$

可行域为空集

新上界 ＝ **14** ＝ 新下界 ＝ **14**

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

完整过程：



ub=14.00
lb=14.00

1
LP=14.66
x1=2.44
x2=3.26

x1<2

x1>3

2
lp=13.9
x1=2
x2=3.3

3
lp=14.58
x1=3
x2=2.86

x2<2

x2>3

比较
故
ub=14

4
lp=14
x1=4
x2=2

5
不可行

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

四、课堂练习

1、问题（1）

$$\max\ 5x_1 + 8x_2$$

s.t.

$$6x_1 + 5x_2 \leqslant 30$$

$$9x_1 + 4x_2 \leqslant 36$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$$

$x_1, x_2 \geqslant 0$, **整数**。

第二节　I.P. 的分枝定界求解法

四、课堂练习

1、问题（1）

$$\max\ 5x_1 + 8x_2$$

s.t.

$$6x_1 + 5x_2 \leqslant 30$$

$$9x_1 + 4x_2 \leqslant 36$$

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

I.P. 之 L.P. 松弛

最优解：$x_1 = 1.43$　$x_2 = 4.29$　o.f. = **41.43**

第二节　I.P. 的分枝定界求解法

四、课堂练习

1、问题（1）

max $5x_1 + 8x_2$	max $5x_1 + 8x_2$
s.t.	s.t.
$6x_1 + 5x_2 \leqslant 30$	$6x_1 + 5x_2 \leqslant 30$
$9x_1 + 4x_2 \leqslant 36$	$9x_1 + 4x_2 \leqslant 36$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$	$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$
$\mathbf{x_1 \leqslant 1}$	$\mathbf{x_1 \geqslant 2}$
$x_1, x_2 \geqslant 0$	$x_1, x_2 \geqslant 0$
$x_1 = 1, x_2 = 4.5$, of. = **41**	$x_1 = 2, x_2 = 3.6$, of. = **38.8**

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

四、课堂练习

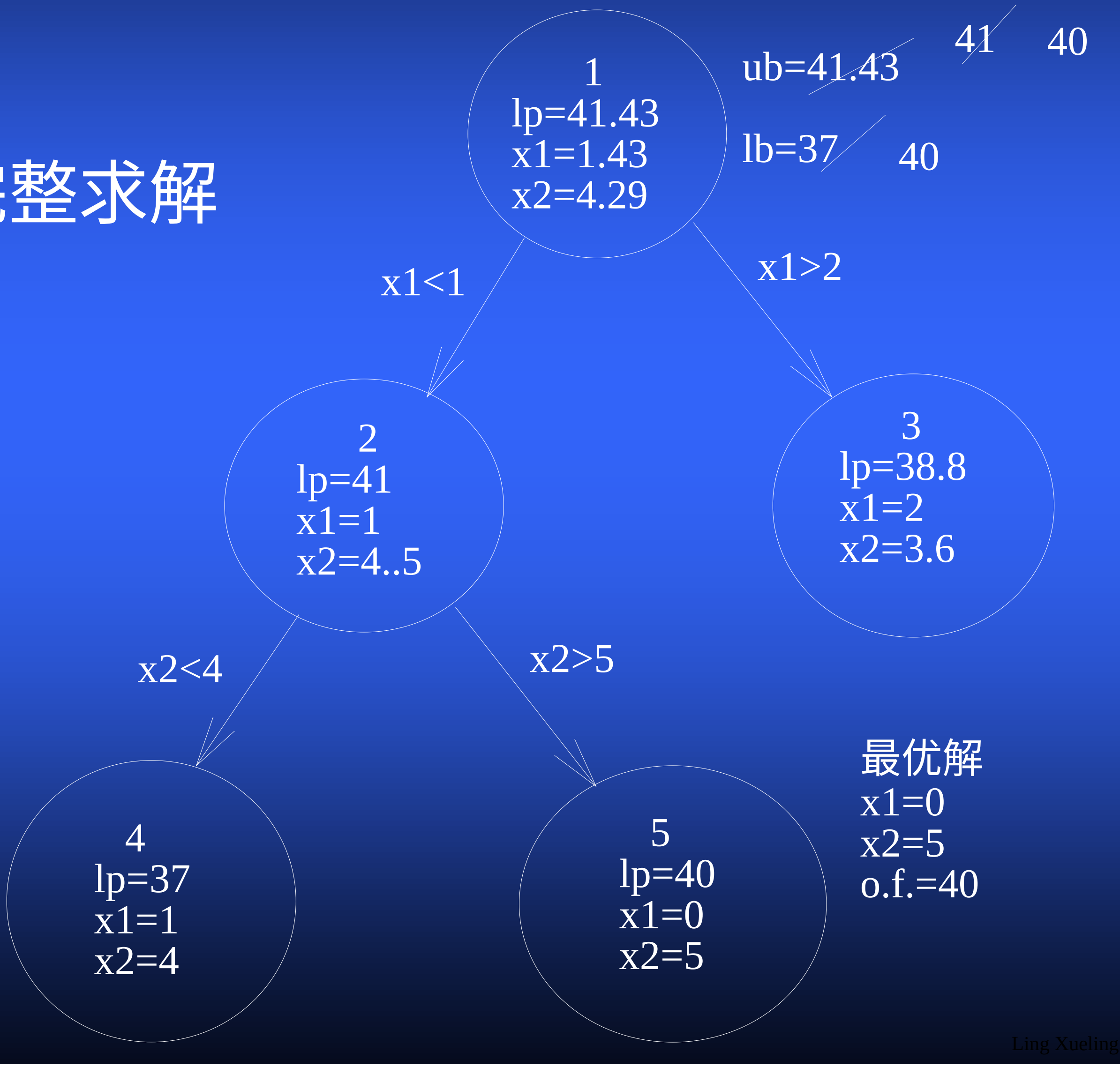
1、问题（1）

max $5x_1 + 8x_2$	max $5x_1 + 8x_2$
s.t.	s.t.
$6x_1 + 5x_2 \leqslant 30$	$6x_1 + 5x_2 \leqslant 30$
$9x_1 + 4x_2 \leqslant 36$	$9x_1 + 4x_2 \leqslant 36$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$	$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$
$\mathbf{x_1 \leqslant 1}$	$\mathbf{x_1 \leqslant 1}$
$\mathbf{x_2 \leqslant 4}$	$\mathbf{x_2 \geqslant 5}$
$x_1, x_2 \geqslant 0$	$x_1, x_2 \geqslant 0$
$x_1 = 1, x_2 = 4$, of. = **37**	$x_1 = 0, x_2 = 5$, of. = **40**

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

四、课堂练习

2、问题（1）完整求解



最优解
x1=0
x2=5
o.f.=40

第二节　I.P. 的分枝定界求解法

四、课堂练习

3、问题（2）——混合整问题

$$\max\ 2x_1 + 3x_2$$

$$195x_1 + 273x_2 \leqslant 1365$$

$$4x_1 + 40x_2 \leqslant 140$$

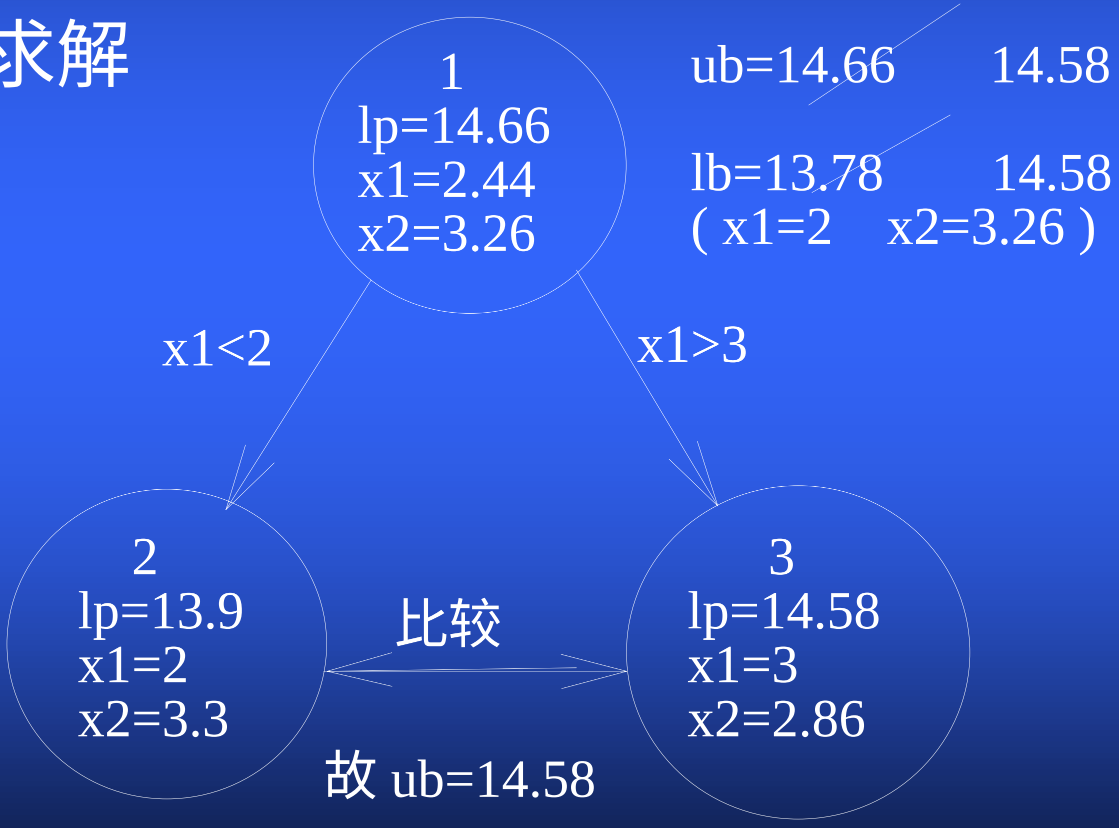
$$x_1 \leqslant 4$$

x_1，$x_2 \geqslant 0$，x_1 整数。

第二节 I.P. 的分枝定界求解法

四、课堂练习

4、问题（2）求解



ub=~~14.66~~ 14.58

lb=~~13.78~~ 14.58
(x1=2 x2=3.26)

故 ub=14.58

The End of Chapter 7