第二章　线性规划

线性规划在数学上较成熟，且应用面极广

1、L.P.干什么

问题	线性约束	线性目标
生产/库存计划	满足需求、资源有限	成本最小或 产量最大
股票/证券选择	有限资金	收益最大
广告媒体选择	有限预算	共知度最大
配送中心、运输	满足需求、储能有限	成本最小

2、L.P. 的基本特征：线性目标函数 ＋ 线性约束式

（Constrained optimization: maximization or minimization）

第一节 一个最大值问题

一、Par 公司生产管理决策问题的提出

1、两种产品：中档、高档 golf 球袋　　　　目标：利润最大

2、四工序：切割（C）缝制（S）装配（F）检验和包装（I & P）

3、问题： 如何组织生产？中、高档产品各应计划生产多少？

二、调研与数据

1、生产部门——工序、工时分析

需用工时	C & D	S	F	I & P
标准	7/10	1/2	1	1/10
高档	1	5/6	2/3	1/4

2、财务部门——单位利润分析：中档 － 10.0， 高档 － 9.00

3、管理部门——可用工时分析

工序	C & D	S	F	I & P
可用工时	630	600	708	135

第一节 一个最大值问题

三、决策问题归纳

1、假设：产品全部可以销售出去

2、要求：在已有的工时约束条件下，使利润最大化的两种产品之生产量各应是？

四、（线性）目标函数

1、建立决策变量 x_1，x_2

2、建立 o.f.

3、概念：解（任意）、可行解（满足约束）、最优解

五、资源的（线性）约束

1、各种工序之可用工时约束

2、非负约束－－**L.P. 一般特征**，可使求解过程得到简化。

第一节 一个最大值问题

六、完整的 L.P. 模型

1、模型

矛盾

VS

统一

$$\text{Max } Z = \text{Max } 10x_1 + 9x_2$$

s.t.

$$\frac{7}{10}x_1 + x_2 \leqslant 630 \quad \text{—— C \& D}$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{6}x_2 \leqslant 600 \quad \text{—— S}$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leqslant 708 \quad \text{—— F}$$

$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leqslant 135 \quad \text{—— I \& P}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

2、说明

1）因为只考虑了主要因素，模型只是现实世界的简化、近似

2）模型主要数学**特征**：所有表达式都是**线性**式。

第二节 线性规划图解法

适用：仅有两个决策变量的 L.P. 模型

一、解点——解的点坐标

二、L.P. 模型的几何表达

1、非负约束的表达

2、（线性）不等式约束的表达

(900, 630)　(1200, 700)　(708, 1062)　(1350, 540)

3、定义

1）可行域　2）可行解

4、o.f. 之几何表达 (180, 200)、(360, 400)、(540, 600)

三、最优解几何表达及其求出

1、确定最优解触及的端点

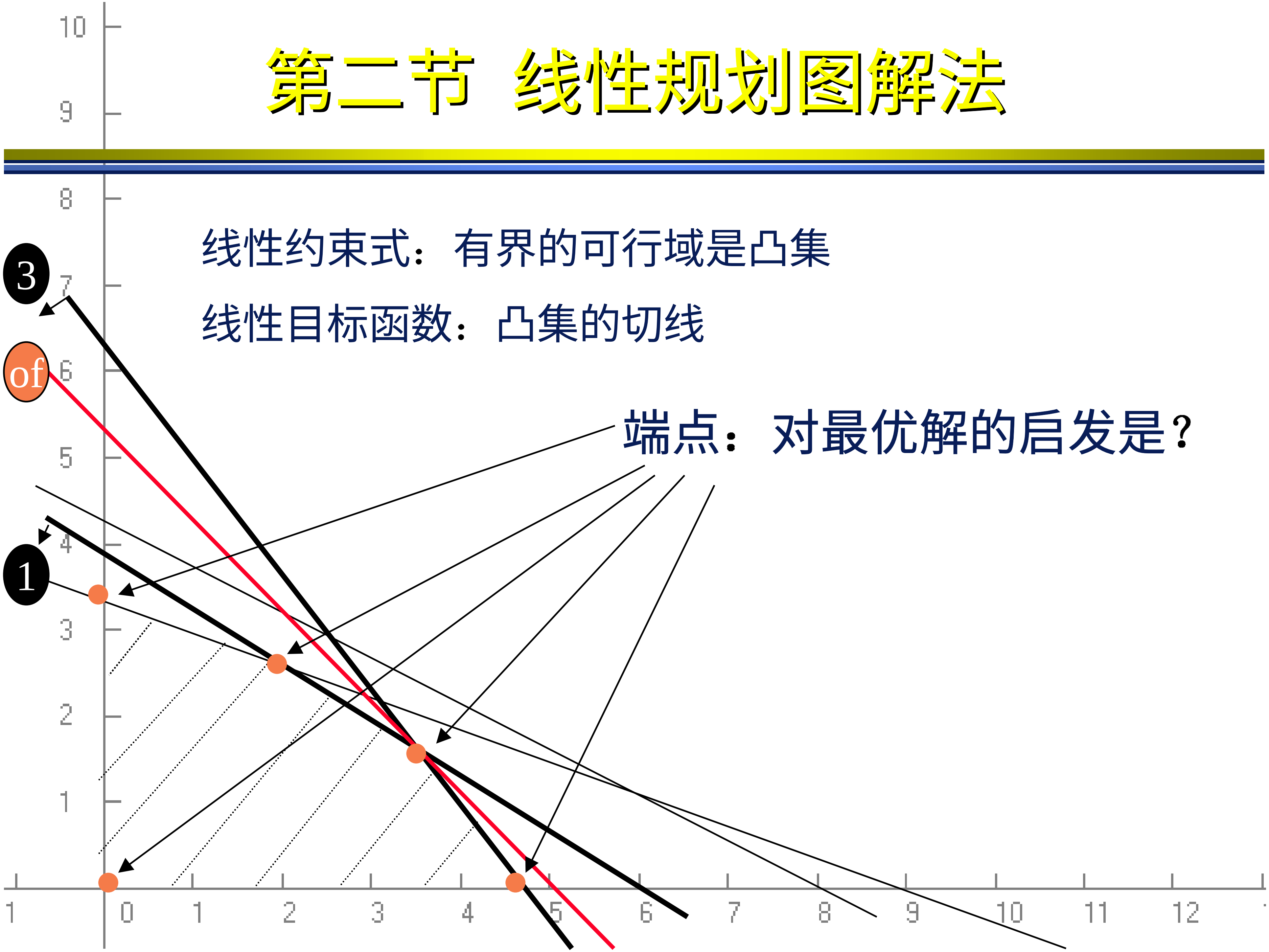
2、解联立方程得最优解坐标 (540,252) 即为最优解点。

第二节 线性规划图解法

线性约束式：有界的可行域是凸集

线性目标函数：凸集的切线

端点：对最优解的启发是？



第二节 线性规划图解法

四、端点与最优解

1、当 $z = 5x_1+9x_2$ 时，最优解也是**端点**：(300,420)

2、定理

若可行域有界，则 L.P. 模型最优解总在**可行域端点**处

3、定理的意义——提供求解 L.P. 模型（迭代方法，单形法）的一般思路：

- 将一般 L.P. 模型化成标准型——约束不等式变成等式
- 利用初等变换求解约束线性方程组：得**基解（端点）**
- 将基解代入目标函数并比较它们的大小
- （通过适当迭代）重复上述步骤直至求得最优的解。

第二节 线性规划图解法

五、松弛变量和标准型

1、松弛变量——能提供资源耗用信息的变量

1）四个约束的剩余分别是： 0 120 0 18

2）定义（slack）

L.P. 模型中对应"≤"约束的闲置能力称为该约束的松弛，用来表达这种松驰的非负变量称为松弛变量

本例中，最优解受到第一、三约束界限，故一、三约束无松弛

2、L.P. 模型标准型 （standard form）

1）定义 （除非负约束外）所有约束式都是等式且所有变量均在目标函数中有所表示之 L.P. 模型 ⇒

2）意义 为将线性代数引入求解多元线性规划的方法作铺垫

3、多余约束

不影响可行域（或：可有可无）的约束，称为多余约束。如上例中的 S（第二个）约束。

第二节 线性规划图解法

五、松弛变量和标准型

$$\max\ 50x_1 + 40x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \qquad (1)$$

s.t.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + s_1 = 150 & (2) \\ x_2 + s_2 = 20 & (3) \\ 8x_1 + 5x_2 + s_3 = 300 & (4) \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0$$

即为 Par 决策模型之标准形。除非负约束外，(2) 一(4) 刚好构成一个 5 个变量、3 个方程的 **线性方程组**。

第三节 线性规划图解法：最小值例子

一、问题及其数学模型

1、有关数据

两种产品：A 或 B

两种成本：2 或 3 / 每单位

两种所需工时：2 或 1 / 每单位

2、有关约束

1）为了追求规模效应，生产总数不得少于 350 单位

2）销售部门报告：A 产品已经获得 125 单位的订货

3）共有 600 可用工时

3、问题：最小成本时两种产品的生产量？

（建模课堂练习）

第三节 线性规划图解法：最小值例子

一、问题及其数学模型

4、数学模型

$$\min z = \min 2x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 350$$

$$x_1 \geq 125$$

$$2x_1 + x_2 \leq 600$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

矛盾

与

统一

第三节 线性规划图解法：最小值例子

二、图解法

1、可行域

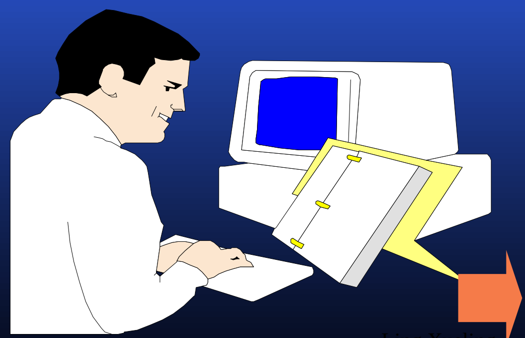
三端点分别是：(250, 350)　　(125, 225)　　(250, 100)

2、o.f. 图形表达

分别令 z = 600, 1200 。。。。得：

3、最优解

$x_1 = 250$ (>125)　　$x_2 = 100$　　o.f. = 800 。



第三节 线性规划图解法：最小值例子

三、剩余变量和标准型

注意：最优解中 $x_1=250$ 超过最小需求125单位，解释？

1、定义 (surplus)

L.P. 问题中对应 "≥"约束的过剩量称为**剩余**，用来表达超过最小约束的量，称为剩余变量

2、标准型

$$\min z = \min 2x_1 + 3x_2 + \mathbf{0}s_1 + \mathbf{0}s_2 + \mathbf{0}s_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 \qquad\qquad &= 350 \\ x_1 \qquad - s_2 \qquad &= 125 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad + s_3 &= 600 \\ x_i, s_i \geq 0 \end{aligned}$$

第四节 线性规划图解法中的特殊情况

一、无穷多解

1、问题特征

o.f. 直线与可行域某边界直线重合

2、例子

设 Par. 公司问题中，中档高尔夫球袋的单位利润降为 6.3

则 $z = 6.3\,x_1 + 9\,x_2$ 与可行域之 C&D 约束直线重合

3、评价

多重最优解点对应多种可选（皆为最大利润）生产方案，

现实中认为：此时可有条件地追求其他“满意”目标

第四节 线性规划图解法中的特殊情况

二、无解

1、问题特征

不可能同时满足所有约束

2、例子

在原 Par. 公司问题中，再加上约束：$x_1 \geq 500$，　$x_2 \geq 360$

3、处理

1）既要指出现有资源的不可行性

2）也要给出适当的可行方案，如：如何增加资源可以使得预订目标得以实现？本例中，各工序如果分别至少补充（80, 0, 32, 5）即可使得最大化利润的目标得到实现。

第四节 线性规划图解法中的特殊情况

三、无限界解

1、问题特征

在求最大化问题时，遭遇 o.f. 可以无限制地增加

2、例子

$$\max\ 20x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$x_1 \geq 2$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

3、评价

模型本身有问题！很可能是有些约束被冒险地删去或忽略

第二章小结

L.P. 模型一般特征：

1、非负约束是默认约束，若的确允许变量 x_j 为负，可令 $x_j = y_1 - y_2, y_i \geq 0$；

2、所有变量都应在目标函数中有所表示来；

3、目标函数和所有约束式都是线性式（不允许出现诸如绝对值之类的符号及其表达式）；

4、约束式左边含变量，右边一般只有常数项不含变量。

The End of Chapter 2