

doi:10.3969/j.issn.1001-358X.2016.03.010

测量技术

抗差加权总体最小二乘算法及其在矿区高程拟合中的应用*

张 敏,冯遵德,谭兴龙,王 仁,田 婧
(江苏师范大学测绘学院,江苏 徐州 221116)

摘要:文中针对矿区高程异常参数求解中,传统最小二乘系数矩阵易受观测值误差影响、总体最小二乘难以抵抗粗差等缺陷,提出一种抗差加权总体最小二乘算法。采用模拟和矿区实测数据对算法进行验证,结果表明:该算法既能削弱系数矩阵受观测值误差影响,也能较好抵抗观测粗差,极大提高了解算结果的精度与可靠性。

关键词:加权总体最小二乘法;抗差估计;标准化残差;高程转换;

中图分类号:P224 **文献标识码:**A **文章编号:**1001-358X(2016)03-0030-05

Robust weighted total least squares algorithm and its application in mine elevation transformation

Zhang Min, Feng Zunde, Tan Xinglong, Wang Ren
(School of Geodesy and Geomatics, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China)

Abstract: The traditional least squares coefficient matrix is easy to be influenced by the observational error in the process of solving the mine elevation transformation, total least squares algorithm can hardly avoid gross error, so robust weighted total least squares was proposed. This algorithm was based on the weighted total least squares iterative algorithm, calculating the residual and standardizing it, using the median algorithm and IGGIII model construction as the weighting factor, adjusting the weight of observation and coefficient matrix, realizing robust estimation total least squares algorithm. The simulation and measurement results were presented that the RWTLS algorithm could not only reduce the affection for observation error of coefficient matrix, but also avoid observation gross error, and improve the accuracy and reliability. It can be applied to mine elevation transformation.

Key words: weighted total least squares; robust estimation; standardized residuals; elevation transformation¹

矿山高精度高程基准的建立是矿山变形灾害监测的基础、安全生产的重要保障。由于矿区地形条件复杂,坡度变化较大,采用常规水准仪测量工作量大、时效性差。GPS 高程为大地高,实际应用中需转化为正常高,因而精确地确定高程异常是将 GPS 高程应用到矿区高程测量的关键。最小二乘(Least - Squares, LS)估计理论在测量平差参数求解中有着广泛而成功的应用,其不具有抗干扰性。20 世纪 80 年

代 Golub 和 Van Loan^[1]首次完整的提出了总体最小二乘方法(Total Least - Squares, TLS)这一概念,该方法弥补了最小二乘法的不足,同时对观测值矩阵和系数矩阵进行修正,是一种较为先进的最小二乘结构。Pearson^[2]导出了 EIV 模型的严密总体最小二乘解。Schaffrin 和 Felus^[3]发表的带有等式约束的整体最小二乘估计方法首次研究了 TLS 方法在大地测量领域的适用性。Schiffrin^[4]通过构造非线性拉格朗

* 基金项目:江苏省自然科学基金(BK20150236);山东省自然科学基金(ZR2013DM011);江苏师范大学研究生科研创新计划重点项目(2015YZD004)

引用格式:张敏,冯遵德,谭兴龙,等.抗差加权总体最小二乘算法及其在矿区高程拟合中的应用[J].矿山测量,2016,44(3):30-34.

日函数的方式,推导出了加权总体最小二乘的迭代解法。Shen^[5]认识到 EIV 模型的本质是一种非线性模型,提出采用非线性最小二乘平差的牛顿-高斯法推导 WTLS 的迭代解法。邱卫宁^[6]等在线性模型的求解中运用改进的加权总体最小二乘法,提高了总体最小二乘法的逼近精度。丁海勇等^[7]针对曲面拟合中的病态法方程求解的问题,利用岭估计算法进行求解。

抗差加权总体最小二乘法 (Robust - Weighted - Total - Least - Squares, RWTLS) 是在 WTLS 的基础上增加粗差的探测和剔除算法,本文给出了最小二乘、总体最小二乘、加权总体最小二乘、抗差加权总体最小二乘法等数学模型,通过拟合数据和实测数据对上述方法进行验证,分析不同算法在矿区高程拟合中的精度。

1 数学模型

1.1 最小二乘模型

若有线性函数误差方程为:

$$V = A\hat{x} - L \quad (1)$$

式中: V 为误差, L 为观测值, A 为系数矩阵。通常认为系数矩阵 A 没有误差,误差仅存在于观测值 L 中, P 为观测值 L 的权阵,则在最小二乘原理 (Least Squares, LS) 的准则约束下如式 (2) 所示,解出参数估值 \hat{x} 。

$$V^T P V = (A\hat{x} - L)^T P (A\hat{x} - L) = \min \quad (2)$$

在实际求解过程中系数 A 常由观测值组成,影响最优参数求解。

1.2 总体最小二乘模型

Golub 和 Van Loan^[1]于 1980 年提出总体最小二乘问题线性系统,如式 (3) 所示:

$$(A - E_A)x = L - e_L \quad (3)$$

式中: $A \in R_{m \times n}$, $L \in R_m$, $x \in R_n$, E_A 为系数阵 A 的误差, e_L 为观测向量 L 的观测误差。若令 e_A 为矩阵 E_A 按列拉直展开,记 $e_A = \text{vec}(E_A)$, Q_A 和 Q_L 分别为 e_A 和 e_L 的协因数阵,则有:

$$\begin{bmatrix} e_L \\ e_A \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_L & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} \quad (4)$$

这一模型称为 EIV (Errors in Variables) 模型。总体最小二乘法 (Total Least Squares, 简称 TLS)^[8-10] 约束准则如式 (5) 所示。

$$e_L^T Q_L^{-1} e_L + e_A^T Q_A^{-1} e_A = \min \quad (5)$$

1.3 加权总体最小二乘模型

在式 (5) 约束条件下,若 e_L 为不等精度观测, E_A 中列间不等精度。设协因数阵 Q_A 可表示为 $Q_A = Q_0 \otimes Q_X$, 式中: $Q_0 = P_0^{-1}$, $Q_X = P_X^{-1}$, P_0 表示系数阵 A 的列向量权阵, P_X 表示系数阵 A 的行向量权阵, “ \otimes ” 表示矩阵间的克罗内克积。

加权总体最小二乘 (Weighted Total Least Squares, 简称 WTLS) 的迭代逼近法^[3] 计算步骤为:

(1) 计算初始值:

$$\hat{v}^{(0)} = 0, \hat{X}^{(0)} = N^{-1}c, N = A^T P_L A, c = A^T P_L L \quad (6)$$

$$\hat{X}^{(1)} = (A^T (Q_L + (\hat{X}^{(0)T} Q_0 \hat{X}^{(0)}) Q_X)^{-1} A)^{-1} A^T (Q_L + (\hat{X}^{(0)T} Q_0 \hat{X}^{(0)}) Q_X)^{-1} L \quad (7)$$

(2) 迭代过程 i 从 0 到 n , 计算中间变量:

$$\hat{v}^{(i)} = (L - A\hat{X}^{(i)})^T (Q_L + (\hat{X}^{(i)T} Q_0 \hat{X}^{(i)}) Q_X)^{-1} Q_X (Q_L + (\hat{X}^{(i)T} Q_0 \hat{X}^{(i)}) Q_X)^{-1} (L - A\hat{X}^{(i)}) \quad (8)$$

计算新的参数估值:

$$\hat{X}^{(i+1)} = (A^T (Q_L + (\hat{X}^{(i)T} Q_0 \hat{X}^{(i)}) Q_X)^{-1} A - \hat{v}^{(i)} Q_0)^{-1} A^T (Q_L + (\hat{X}^{(i)T} Q_0 \hat{X}^{(i)}) Q_X)^{-1} L \quad (9)$$

(3) 判断迭代终止条件

$$\|\hat{X}^{(i+1)} - \hat{X}^{(i)}\| < \varepsilon \quad (10)$$

判断迭代终止要看式 (10) 是否成立,若成立则终止计算,否则转入步骤 (2)。单位权中误差近似估值为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\lambda^T (L - A\hat{X})}{r}} \quad (11)$$

式中: r 为自由度, $\hat{\lambda} = (Q_L + (\hat{X}^T Q_0 \hat{X}) Q_X)^{-1} (L - A\hat{X})$ 。

2 抗差加权总体最小二乘法

在式 (5) 的约束准则下,当观测值含有粗差时,参数估计结果并不可靠。因此本文提出基于等价权的抗差总体最小二乘算法,其估计准则如下所示:

$$e_L^T \bar{Q}_L^{-1} e_L + e_A^T \bar{Q}_A^{-1} e_A = \min \quad (12)$$

式中: \bar{Q}_L 和 \bar{Q}_A 为 Q_L 和 Q_A 分别乘以抗差因子得到的等价协因数阵。IGG III^[11] 是目前抗差估计中应用广泛且效果较好的抗差权函数模型,其抗差因子如下所示:

$$r = \begin{cases} 1, s \leq k_0 \\ \frac{k_0}{s} \left(\frac{k_1 - s}{k_1 - k_0} \right), k_0 \leq s \leq k_1 \\ 10^{-30}, s < k_1 \end{cases} \quad (13)$$

式中： k_0, k_1 为阈值，通常 $k_0 = 1.5 \sim 2.0, k_1 = 3.0 \sim 5.5$ ； s 为标准化残差， $s = |v| / (\sigma_0 \sqrt{q_v})$ ， σ_0 为用中位数计算得到的单位权中误差， v 为残差值， q_v 为 v 的协因数。

3 实验与分析

3.1 模拟数据

模拟直线 $y = \xi_1 + \xi_2 x$ ，设计直线模型为 $y = 10 - 2x$ ，自变量范围为 25.30 ~ 40.26，因变量范围为 -70.52 ~ -40.60 取变量范围内的 10 个点，数据见表 1，其中 σ_x, σ_y 分别为每个点 x 坐标和 y 坐标的模拟中误差。

设计实验方案：

方案 1：不添加模拟粗差；

方案 2：在 4 号点的横坐标添加粗差 $\Delta x_4 = 12, 7$ 号点的纵坐标添加粗差 $\Delta y_7 = 5$ ；

方案 3：在 3 号点的横坐标添加粗差 $\Delta x_3 = 6, 6$ 号点的纵坐标添加粗差 $\Delta y_6 = -8, 9$ 号点的纵坐标

表 1 模拟点坐标和中误差

点号	x	y	σ_x	σ_y
1	25.30	-40.60	0.08	0.32
2	27.63	-45.26	0.25	0.03
3	29.11	-48.22	0.06	0.13
4	30.50	-51.00	0.04	0.19
5	32.16	-54.32	0.15	0.17
6	33.59	-57.18	0.08	0.26
7	36.82	-63.64	0.12	0.04
8	35.74	-61.48	0.24	0.11
9	38.00	-66.00	0.18	0.02
10	40.26	-70.52	0.16	0.07

添加粗差 $\Delta y_9 = 7$ 。

取先验单位权中误差 $\sigma_0 = 1$ ，分成采用 LS、TLS、WTLS、RWTLs 对以上数据进行计算，为了避免随机误差对参数求解产生的影响，每个方案模拟计算 500 次，求取 ξ_1, ξ_2 的平均值、 ξ_1, ξ_2 与真值的差 $\Delta \xi_1, \Delta \xi_2$ 和验后单位权中误差 $\hat{\sigma}_0$ ，如表 2 所示；每种方案下在同一坐标系内画出 LS、TLS、WTLS、RWTLs 拟合直线与 $y = 10 - 2x$ 的对比图，如图 1 所示。

表 2 各方案拟合结果

方案	计算方法	ξ_1	ξ_2	$\Delta \xi_1$	$\Delta \xi_2$	$\hat{\sigma}_0$
1	LS	9.973 5	-1.999 3	-0.026 5	0.000 7	0.333 7
	TLS	10.461 0	-2.013 8	0.461 0	-0.013 8	0.032 0
	WTLS	9.996 0	-2.000 1	-0.004 0	-0.000 1	0.015 2
	RWTLs	9.996 0	-2.000 1	-0.004 0	-0.000 1	0.015 2
2	LS	-13.089 7	-1.238 1	-23.089 7	0.761 9	6.644 3
	TLS	-0.018 1	-1.627 1	-10.018 1	0.372 9	3.684 9
	WTLS	12.732 2	-2.058 8	2.732 2	-0.058 8	0.174 5
	RWTLs	9.486 3	-1.971 4	-0.513 7	0.028 6	0.100 0
3	LS	2.601 7	-1.746 4	-7.398 3	0.253 6	5.387 8
	TLS	-0.056 7	-1.677 5	-10.056 7	0.322 5	2.770 4
	WTLS	17.817 8	-2.226 4	7.817 8	-0.226 4	0.167 6
	RWTLs	10.918 5	-2.026 0	0.918 5	-0.026 0	0.066 6

从图 1 和表 2 可以看出：方案 1 中 x, y 坐标均不含粗差，WTLS 方法和 RWTLs 方法在不受粗差影响时结果相当，两种方法均对系数矩阵和观测向量的误差进行了合理分配，得到的参数估值与真值的差分别为 -0.004 和 -0.000 1，单位权中误差为 0.015 2，均远小于 LS 方法和 TLS 方法所得结果。

方案 2 和方案 3 中受到模拟粗差的影响，由于 LS、TLS、WTLS 方法均不具备抗粗差能力，其拟合结果都受到了明显影响，有的甚至产生较大偏差，

RWTLs 方法求得的参数估值和真值的平均差最小，方案 2 中为 -0.513 7 和 0.028 6，方案 3 中为 0.918 5 和 -0.026，单位权中误差也显著优于其它三种方法，这说明抗差总体最小二乘法具有很高的精度和良好的抗粗差性。

3.2 矿区实测数据

某矿区高程点进行高程异常拟合实验，采用 LS、TLS、WTLS、RWTLs 算法进行验证。实验区内共布设控制点 17 个，高程异常 ξ 近似取控制点大地高与

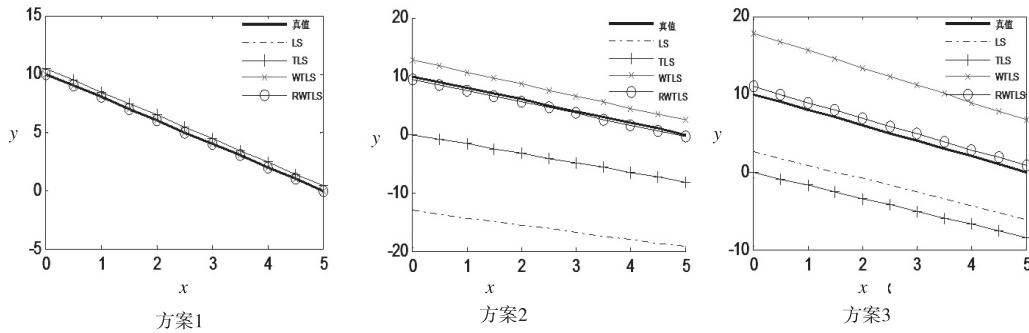


图1 三种方案直线拟合结果

正常高之差,数据列于表3。将前10个点作为已知值,利用二次曲面 $y = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$ 进行拟合,求得曲面参数 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 进而求出后7个点转换后的高程值,对四种方法下的拟合效果进行对比分析。

表3 点x,y坐标、高程异常 (单位:m)

点号	x	y	ξ
1	6 375	9 179.74	21.034 4
2	6 854.849	8 567.506	21.007 6
3	6 324.251	8 659.474	21.017 2
4	3 826.318	9 348.917	21.05 6
5	4 312.203	10 321.498	21.085 6
6	4 001.762	10 035.27	21.078 9
7	7 961.396	8 691.018	20.997 8
8	7 524.909	10 219.017	21.051 6
9	5 549.066	8 813.558	21.028 5
10	8 016.26	9 235.369	21.013 8
11	5 858.08	9 248	21.043 2
12	4 029.592	9 613.378	21.065 4
13	6 091.401	9 632.434	21.055 4
14	4 827.161	10 392.773	21.082 6
15	6 814.669	9 080.199	21.027 3
16	4 231.79	9 937.72	21.074
17	7 660.247	9 189.334	21.017

设计两种方案:方案(1)不添加粗差;方案(2)为6号点的横坐标添加粗差 $\Delta X_6 = 200$ m,9号点的高程异常添加粗差 $\Delta \xi_9 = 1$ m。以二次多项式曲面作为拟合面,分别采用LS、TLS、WTLS、RWTLS方法进行参数估计后所得拟合高程与真值之差如表4所示。

由表4可知:方案1中等权、无粗差的情况下,四种估计方法所得高程值均与真实值接近;方案2中7个检核点LS、TLS、WTLS、RWTLS拟合高程误差绝对值的平均值分别为102.397 mm,112.754 mm,99.071 mm,40.395 mm,RWTLS方法在同时考虑坐标值误差和高程异常误差的基础上对存在的粗差进行修正,所得拟合高程值与真值最为接近,总体效果准确可靠。

4 结论

通过直线拟合和矿区高程转换计算表明,当系数矩阵和观测矩阵不含粗差时,WTLS和RWTLS方法等价且总体解算效果优于LS和TLS方法;当系数矩阵和观测矩阵含有粗差时,LS、TLS、WTLS方法抗差性弱,解得参数值与真值偏差较大,而RWTLS方

表4 检核点拟合残差

(单位:mm)

方案	点号 算法	点号						
		11	12	13	14	15	16	17
1	LS	-1.839 7	-0.895 7	-3.701 8	2.784	-1.376 7	0.418 1	1.322 3
	TLS	-1.839 7	-0.895 7	-3.701 8	2.784	-1.376 7	0.418 1	1.322 3
	WTLS	-1.839 6	-0.895 7	-3.701 7	2.784	-1.376 6	0.418 1	1.322 4
	RWTLS	-1.839 6	-0.895 7	-3.701 7	2.784	-1.376 6	0.418 1	1.322 4
2	LS	240.562 1	108.762 8	164.166 5	-8.078 4	146.473 1	25.950 5	-22.785 9
	TLS	265.835 8	114.426 3	193.629 4	-4.194 5	166.616	35.119 1	-9.456
	WTLS	223.694 8	119.527 7	135.005 3	-21.782 6	127.991 2	22.669 5	-42.824 8
	RWTLS	19.072 5	102.301 3	-88.296 1	-4.154 4	-33.797 1	-22.831 4	-12.312 2

法表现良好的抗差性,解算结果与真值偏差最小,在矿区高程拟合中有较好的应用。矿区高程异常拟合的速度和精度取决于多种因素。不同的曲面拟合模型或所选已知点的几何结构都可能影响高程转换结果,同时病态矩阵求逆亦会影响抗差总体最小二乘参数求解精度,所以 RWLS 方法的矿区高程转换问题仍有待进一步研究。

参考文献:

- [1] Golub H G and van Loan F C, 1980. An analysis of the Total Least - squares problem [J]. SIAM J. Numer. Anal. , 17: 883 - 893.
- [2] Pearson K. On Lines and Planes of Closet Fit to Systems of Points in Space [J]. Phil Mag, 1901, 2: 559 - 572.
- [3] Schiffrin B, Felus Y A. On Total Least - squares Adjustment with Constraints [J]. IAG - Symp, 2015, 128: 417 - 258.
- [4] Schiffrin B, Lee I, Felus Y, Choi Y. Total least - squares for geodetic straight - line and lane adjustment [J]. Boll Geod SciAff, 2006, 65: 141 - 168.
- [5] Shen YZ, Li BF, Chen Y. An interative solution of weighted total least squares adjustment [J] Journal of Geodesy, 2011, 85: 229 - 238.
- [6] 邱卫宁, 齐公玉, 田丰瑞. 整体最小二乘求解线性模型的改进算法 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2010, 35(6): 708 - 710.
- [7] 丁海勇, 杨延珍, 王新志, 等. 基于移动曲面拟合方法的 GPS 高程转换 [J]. 大地测量与地球动力学, 2010, 06: 82 - 85.
- [8] Van Huffel, S., et al. Recent advances in total least squares techniques and errors - in - variables modeling [J]. SIAM, Philadelphia 1997.
- [9] Golub G H & Van Loan C F. An analysis of the Total Least Squares problem [J]. SIAM J Numer Anal, 1980, 17(6): 883 - 893.
- [10] Van Huffel S., and Vandewalle. The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis [J]. SIAM, Philadelphia, 1991.
- [11] 周江文, 杨元喜, 欧吉坤, 等. 抗差估计论文集 [M]. 北京: 测绘出版社, 1992.

作者简介: 张敏(1989 -), 女, 汉族, 山西忻州人, 硕士研究生, 主要研究方向为大地测量数据处理。

(收稿日期: 2016 - 03 - 10)

(上接第8页)

- [8] 王卫军, 侯朝炯, 李学华. 老顶给定变形下综放沿空掘巷合理定位分析 [J]. 湘潭矿业学院学报, 2001, 16(2): 1 - 4.
- [9] 王德超, 李术才, 王琦, 等. 深部厚煤层综放沿空掘巷煤柱合理宽度试验研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(3): 539 - 548.

作者简介: 郭东杰(1977 -), 男, 本科毕业于河南理工大学采矿工程专业, 工程师, 山西晋城人, 现任晋城蓝焰煤业股份有限公司成庄矿生产矿长, 主要从事煤矿生产技术开发与管理。

(收稿日期: 2016 - 04 - 13)

欢迎投稿, 欢迎订阅!

(详见官方网站: <http://www.KSCLBJB.com>)