文章编号:1003－207(2016)01－0021－09
DOI:10.16381/j.cnki.issn1003－207x.2016.01.003

基于门限双幂变差的资产价格时点波动非参数估计

沈根祥[1,2]

(1. 上海财经大学经济学院,上海 200433;
2. 上海财经大学数理经济学教育部重点实验室,上海 200433)

摘 要:估计带跳资产价格的时点波动时,需要用门限过滤方法消除跳的影响。在有限样本下,门限过滤会产生错滤偏误和漏虑偏误,降低估计精度。跳错滤产生的偏误可通过对错滤样本进行补足的方法进行纠偏,但由于发生时点未知,跳漏滤产生的偏误无法纠正,只能通过估计量设计来减少漏滤偏误。本文首次提出基于门限双幂变差的时点波动估计量,采用核平滑方法对资产价格时点波动进行非参数估计,有效减少跳错滤导致的偏误。采用随机阵列极限理论,本文证明了估计量的一致性和渐进正态性,在分析有限样本偏误的基础上,给出估计量的纠偏方法。蒙特卡洛模拟表明,本文给出的估计量,漏滤偏误明显小于基于二次变差构造的估计量,对时点波动估计的性质具有实质改进。采用Kupiec动态VaR精度检验对沪深300指数的实证分析表明,本文给出的时点波动估计更能描述资产收益的波动特征。

关键词:时点波动;Poisson跳;双幂变差;核平滑
中图分类号:F830.9 **文献标识码**:A

1 引言

波动(Volatility)在金融理论和实践起着重要作用。连续时间金融认为,资产价格的波动具有随机性和时变性,是随机过程。波动过程在时间点上的值称为时点波动(Spot Volatility)。方差的不可观测性使波动成为隐变量(Latent Variable),需通过资产价格样本间接进行估计。在较低频率下(例如周、月等),可采用ARCH类模型和SV模型等参数模型研究资产价格的波动,并采用极大似然方法估计模型参数。近年来,在对高频数据的研究中,时点波动的估计和推断显现出重要性。鉴于时点波动不可观测的特点,人们尝试采用非参数方法估计时点波动并将估计值作为"样本",使波动过程变得"可观测",据此直接对波动进行分析或者以此作为进一步分析的基础,以克服波动不可观测的限制。Fan Jianqing和Wang Yazhen[1]采用核平滑技术给出高维随机波动模型时点波动的一致估计及其渐进分布,Kristensen[2]从RV的性质出发给出扩散过程时点波动估计及其渐进分布。Bandi和Reno[3]、Bollerslev和Todorov[4]在研究中把时点波动作为输入变量,Ait-Sahalia等[5]在研究杠杆效应时,讨论了时点波动估计存在的各种偏误对研究结果的影响。用非参数方法估计时点波动,对资产价格模型的约束少,与GARCH和SV模型相比,能减少模型设定误差。

在高频交易数据中,资产价格经常发生跳跃[6]。跳的存在严重影响波动的估计准确性,包括积分波动(Integrated Volatility)和时点波动。文献中采用双幂变差和门限二阶变差两种方法消除跳的影响。沈根祥[7]借助门限方法[8],采用截尾收益平方构造时点波动估计量来消除跳的影响,并允许资产价格存在杠杆效应,推广了Fan Jianqing和Wang Yazhen[1]和Kristensen的结论。门限截尾基于连续资产价格过程在很短时间内的改变量已接近1的概率不超过某个门限值,并将超过临界值的观测值作为跳过滤掉。门限方法在跳过滤时会产生的两类错误:错滤和漏滤。将不是跳的超过门限值价格改变量作为跳滤掉会产生错滤,错滤导致估计量的下偏误,而不能将小于门限值的跳过滤掉会产生漏滤,

收稿日期:2014－03－17; **修订日期**:2015－02－14
基金项目:教育部人文社科研究规划基金资助项目(13YJA790095)资助;上海财经大学数量经济教育部重点实验室开放课题资助(201301KF01)
通讯作者简介:沈根祥(1964－),男(汉族),河南许昌人,上海财经大学教授,博士生导师,研究方向:金融计量学,金融市场数量分析,E-mail:syxman@shufe.edu.cn.

漏滤导致估计量的上偏误。给定门限值后，两类偏误此消彼长：过大（小）的门限值在减少（增加）错滤偏误的同时，将增加（减少）漏滤偏误。门限值给定后，哪些价格改变量被滤掉是知道的，可采用不同的方法对错误过滤掉的样本进行补足以减少错滤偏误。Corsi 等[9]采用价格改变量的条件数学期望补充被滤掉的样本，沈根祥[7]则采用邻近未被滤掉的价格改变量均值补充错滤样本。采用门限方法对跳进行过滤时，未被滤掉跳的位置是不知道的，因此不能进行修正以减少漏滤偏误。错滤造成的估计偏误大于漏滤造成的偏误，往往取较大门限值以减少错滤偏误，这势必增加漏滤偏误[7]。如何减少跳漏滤导致的估计偏误，是时点波动估计需要解决的问题。本文将消除跳影响的两种方法结合起来，首次采用门限双幂变差构造时点波动估计量，以减少跳漏滤带来的估计偏误。

国内对金融资产价格波动的研究大多以离散时间 GARCH 模型和 SV 模型为主，近年来出现的基于高频数据的研究多为 RV 和 IV 的估计并以此为基础进行含跳资产价格过程的建模。陈浪南和孙坚强[10]采用 GARCH 跳模型对上证指数的实证研究表明，指数中的 Poisson 跳存在时变特征和群集效应，刘志东和陈晓静[11]使用无限活跃 Levy 纯跳 CGMY 模型研究上证综指的跳规律，采用 GMM 方法估计模型参数，发现上证综指中跳活跃 BG 指数小于 1。王春峰等[12]基于 BN-S 方法对上证综指已实现方差进行分解，研究跳跃性方差的统计性质，采用 HAR-RV-CJ 模型对已实现方差进行预测，陈国进和王占海[13]将沪深 300 指数的已实现方差分解为连续性方差和跳跃性方差并分别建立模型，杨科和陈浪南[14]用门限双幂变差估计积分方差对 BN-S 方法进行改进后对上证综指 5 分钟高频数据进行跳存在性检验，并使用 ACD 模型和 ARCH 模型对波动率中的跳行为进行研究。沈根祥[6]采用门限双幂变差改进 Lee 和 Mykland[15]的方法，对沪深 300 指数中泊松跳跃行为进行了逐时点检验和统计分析。杨科等[16]将波动分解为跳波动和积分波动，并构造包含跳的 AHAR-RV-CJ 模型对中国股市的已实现波动率进行预测，并与其它波动预测模型进行比较。时点波动估计方面，沈根祥[7]采用以门限二阶变差为基础，采用核平滑技术构造了跳扩散过程的时点波动非参数估计。

现有文献中的时点波动估计均以价格过程的二阶变差为基础进行构造，本文首次以双幂变差为基础，结合跳过滤的门限方法构造跳扩散过程时点波动的非参数估计，以最大程度减少跳漏滤带来的估计偏误。采用随机阵列极限定理证明了估计量的一致性和渐近正态性。为更有效减少跳错滤带来的估计偏误，本文采用跳发生点附近价格改变量的中位数作为被滤跳样本的补充。蒙特卡洛模拟显示，本文构造的估计量能显著减少跳漏虑带来的估计偏误，采用动态 VaR 精度检验对沪深 300 指数的实证分析表明，本文给出的时点波动估计更能描述资产收益的波动特征。

2 资产价格过程模型设定

资产价格模型的设定包括收益方程和波动方程。设时刻 t 处的资产价格为 P_t，对数价格（以下简称价格）为 $p_t = \ln P_t$，其微分 dp_t 为收益（率）。无套利市场价格过程 p_t 是特殊半鞅，服从跳扩散过程。时刻 t 处资产价格的波动用对数价格的方差 σ_t^2 来计量，称为时点波动。采用平方根过程（也称 CIR 模型）刻画时点波动以保证波动的非负性。为此，将资产价格模型设定为：

$$dp_t = \mu_t dt + \sigma_t dw_t + dJ_t \quad t \in [0,T] \qquad (1)$$

其中 μ_t 为适应过程（Adapted Process），w_t 为标准布朗运动，表示收益模型风险源。$\mu_t dt + \sigma_t dw_t$ 为价格的连续部分，dJ_t 为跳部分，文献中常将 J_t 设定为复合 Poisson 过程，即 $J_t = \sum_{i=1}^{N_t} \eta_i$，$N_t$ 为 Poisson 计数过程，跳发生密度为 λ_t，η_i 为第 i 个跳的幅度（Size）。

为方便，设 $T=1$。设 $[0,1]$ 内等间隔时点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ 处观测到的交易价格样本数据为 $p_{t_i}, i=0,2,\cdots,n$。$\delta = t_{i+1} - t_i = 1/n$ 表示时间间隔。$\Delta_i p \equiv p_{t_i} - p_{t_{i-1}}$ 表示区间 $[t_i, t_{i-1}]$ 上的价格改变。$(\Delta_i p)^2$ 称为价格过程 p_t 在 $[t_i, t_{i-1}]$ 上的二阶变差，$0.5\pi \mid \Delta_i p \mid\mid \Delta_{i+1} p \mid$ 称为双幂变差。二阶变差和双幂变差都是 p_t 在 $[t_i, t_{i-1}]$ 积分波动的无偏估计。$\Delta_i w = w_{t_i} - w_{t_{i-1}}$ 表示布朗运动 $[t_i, t_{i-1}]$ 的改变量。为简化符号，用 σ_i^2 表示时点 t_i 处时点波动，即 $\sigma_i^2 \equiv \sigma_{t_i}^2$。对模型进行如下假设：

A1. μ_t 和 σ_t^2 局部有界（Locally Bounded），σ_t^2 为 Ito 半鞅过程。

资产价格模型大多为右连续左极限存在的随机过程，满足条件 A1.[17]。本文中的估计量基于核平滑非参数方法，对核函数和带宽作如下假设：

K1. 核函数 $K(\cdot)$ 为非负实值连续可导函数，

且导数有界，并满足：

$$\int_R K(z)dz = 1,\ \int_R zK(z)dz < \infty,\ \int_R K^m(z)dz \equiv K_m < \infty,\ m = 2,4$$

K2. 带宽（Bandwidth）h 满足：(i) $h \to 0$；(ii) 当 $n \to \infty$、$h \to 0$ 时，$nh \to \infty$，$nh^2\log(1/h) \to 0$。

3　时点波动估计量及其性质

3.1　具有杠杆效应的扩散过程时点波动估计量

对任意时点 $t \in (0,T)$，设 $K_h(s) = h^{-1}K[(s-t)/h]$ 为平滑核。首先定义资产价格过程不存在跳的时点波动估计量：

$$\hat{\sigma}_t^2 \equiv \frac{\pi}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{n} K_h(t_i)\mid \Delta_i p \mid\mid \Delta_{i+1} p \mid \tag{2}$$

在 p_t 不存在跳时，$\hat{\sigma}_t^2$ 是 σ_t^2 的一致估计，并渐近服从正态分布。

定理 1：设 p_t 为连续过程，$dJ_t = 0$。如果条件（A1.）、（K1.）和（K2.）满足，对 $\forall t \in (0,T)$，有：

(i) $\hat{\sigma}_t^2 \xrightarrow{p} \sigma_t^2$；(ii) $\sqrt{nh}(\hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2) \xrightarrow{sL} N(0,\alpha\sigma_t^4 K_2)$

其中 $\alpha = \pi^2/4 + \pi - 3 \approx 2.61$，$\xrightarrow{p}$ 表示以概率收敛，$\xrightarrow{sL}$ 表示稳态分布收敛（Stable in Law）。

证明：根据黎曼积分定义、核函数性质以及 σ_t^2 的连续性，当 $\delta,h \to 0$ 时

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} K_h(t_i)\delta = 1 + O(\delta),\ h^{m-1}\sum\nolimits_{i=1}^{n} K_h^m(t_i)\delta = K_m + O(\delta),\ m = 2,4$$

$$h^{m-1}\sum\nolimits_{i=1}^{n} K_h^m(t_i)\sigma_{t_i}^m\delta = \sigma_t^m\int_R K^m(z)dz + O(h) + O(\delta),\ m = 2,4 \tag{3}$$

由(3)第一式得出：

$$\sqrt{nh}(\hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2) = \sqrt{nh}\sum\nolimits_i K_h(t_i)\ \frac{\pi}{2}[\mid \Delta_i p \mid\mid \Delta_{i+1} p \mid - \frac{2}{\pi}\sigma_t^2\delta] + O(\sqrt{h\delta}) \tag{4}$$

为叙述方便，设：

$$V_t \equiv \sqrt{nh}\sum\nolimits_i K_h(t_i)\ \frac{\pi}{2}[\mid \Delta_i p \mid\mid \Delta_{i+1} p \mid - \frac{2}{\pi}\sigma_t^2\delta]$$

价格过程式(1)中的漂移项 μ_t 对 $\hat{\sigma}_t^2$ 的渐近性质没有影响[18]，只需对满足 $dp_t = \sigma_t dw_t$ 的 p_t 证明即可。此时：

$$\Delta_i p \equiv \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_s dw_s^{(1)} \tag{5}$$

考虑时间区间 $(t_{i-1},t_i]$ 和 $(t_i,t_{i+1}]$ 上价格该变量 $\Delta_i p$ 和 $\Delta_{i+1} p$。σ_t 是 t 的连续函数，时间间隔很小时，用 σ_{i-1} 近似 $\sigma_s \in (t_{i-1},t_i] \cup (t_i,t_{i+1}]$，用 $\beta_i \equiv \sigma_{i-1}\Delta_i w$ 和 $\beta_i' \equiv \sigma_{i-1}\Delta_{i+1} w$ 分别近似 $\Delta_i p$ 和 $\Delta_{i+1} p$。设：

$$U_t \equiv \sqrt{nh}\sum\nolimits_i \frac{\pi}{2}K_h(t_i)[\mid \beta_i \mid\mid \beta_i' \mid - (\mathrm{E}_{i-1}\mid \beta_i \mid)\mathrm{E}_{i-1}(\mid \beta_i' \mid)]$$

其中 $E_{i-1}(\cdot) \equiv E[\cdot \mid F_{i-1}]$，$F_{i-1} = \sigma(p_s, s \leqslant t_{i-1})$ 表示到 t_{i-1} 为止资产价格的信息集合。定理的证明转化为 U_t 稳态分布收敛的证明。需要证明 $U_t \xrightarrow{sL} N(0,\alpha\sigma^4K_2)$ 和 $U_t - V_t \xrightarrow{p} 0$。随机阵列极限定理中的和式求和项均以条件期望 $E_{i-1}(\cdot)$ 的形式出现，由于 $\sigma_{i-1} \in F_{i-1}$，$\Delta_i w$ 和 $\Delta_{i+1} w$ 与 F_{i-1} 独立，服从 $N(0,\delta)$，U_t 中求和项取条件期望 $E_{i-1}(\cdot)$ 后，能够实现 σ_{i-1} 和 Δw 的分离，即：

$$E_{i-1}(\mid \beta_i \mid) = E_{i-1}(\sigma_{i-1} \mid \Delta_i w \mid) = \sigma_{i-1}E_{i-1}(\mid \Delta_i w \mid) = \sigma_{i-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}\delta}$$

$$E_{i-1}(\mid \beta_i' \mid) = E_{i-1}(\sigma_{i-1} \mid \Delta_{i+1} w \mid) = \sigma_{i-1}E_{i-1}(\mid \Delta_{i+1} w \mid) = \sigma_{i-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}\delta} \tag{6}$$

并且求和项均为鞅差序列，便于采用随机分析工具。

$U_t \xrightarrow{sL} N(0,\alpha\sigma^4K_2)$ 的证明：利用随机阵列部分和中心极限定理[19]进行证明。U_t 的求和通项中 $\beta_i' = \sigma_{i-1}(w_{i+1} - w_i)$ 不是关于 F_i 可测，而是关于 F_{i+1} 可测，为满足定理条件，将 U_t 变形为：

$$U_t = \frac{\pi}{2}\sqrt{nh}\sum\nolimits_{i=2}^{n+1} K_h(t_{i-1})(\mid \beta_{i-1} \mid\mid \beta_{i-1}' \mid - (E_{i-2}\mid \beta_{i-1} \mid)E_{i-2}(\mid \beta_{i-1}' \mid)) = U_t' + \frac{\pi}{2}\sqrt{nh}K_h(t_1)(\mid \beta_2 \mid - E_1\mid \beta_2 \mid)(E_1\mid \beta_2' \mid) + \frac{\pi}{2}\sqrt{nh}K_h(t_{n-1})(\mid \beta_n \mid - E_{n-1}\mid \beta_n \mid)(E_{n-1}\mid \beta_n' \mid)$$

其中：

$$U_t' = \frac{\pi}{2}\sqrt{nh}\sum\nolimits_{i=2}^{n+1} K_h(t_{i-1})(\mid \beta_{i-1} \mid (\mid \beta_{i-1}' \mid - E_{i-2}\mid \beta_{i-1}' \mid) + (\mid \beta_i \mid - E_{i-1}\mid \beta_i \mid)(E_{i-1}\mid \beta_i' \mid))$$

由于 $E_1\mid \beta_2 \mid = E_1\mid \beta_2' \mid = \sigma_1^2\delta\sqrt{2/\pi}$，因此：

$$\sqrt{nh}K_h(t_1)\mid\mid \beta_2 \mid - E_1\mid \beta_2 \mid\mid(E_1\mid \beta_2' \mid) = \sqrt{nh}\delta\sigma_1^2\mid\mid u \mid - \frac{\pi}{2}\mid = O_p(n^{-1/2}\sqrt{h}) \xrightarrow{p} 0$$

其中 $u \sim N(0,1)$。类似证明 $\sqrt{nh}K_h(t_{n-1})(\mid \beta_n \mid -$

$E_{n-1}|\beta_n|)(E_{n-1}|\beta_n'|)$ 以概率收敛到 0。因此 $U_t \xrightarrow{p} U_t'$，对 U_t 的证明转化为对 U_t' 的证明。对 U_t' 应用随机阵列部分和极限定理，其求和通项：

$$q_i \equiv \frac{\pi}{2}\sqrt{nh}K_h(t_{i-1})(|\beta_{i-1}|(|\beta_{i-1}'|-E_{i-2}|\beta_{i-1}'|)+(|\beta_i|-E_{i-1}|\beta_i|)(E_{i-1}|\beta_i'|)),$$

关于 F_i 可测。根据 Jacod 和 Shiryayev[19]，需要证明：

$$S_a \equiv \sum_i E_{i-1}[q_i] \xrightarrow{p} 0; S_b \equiv \sum_i E_{i-1}[q_i^2] \xrightarrow{p} \alpha\sigma_t^4 K_2$$

$$S_c \equiv \sum_i E_{i-1}[q_i^4] \xrightarrow{p} 0; S_d \equiv \sum_i E_{i-1}|q_i \Delta_i H| \xrightarrow{p} 0$$

其中 $H = w$ 或者是与 w 正交的有界鞅。对 S_a，由于 $E_{i-1}[q_i]=0$，$S_a=0$。对于 S_b，设 $C_i=\frac{\pi^2}{4}nhK_h^2(t_{i-1})$。$\Delta_i w$、$\Delta_{i-1}w$ 独立，服从 $N(0,\delta)$，对于 $k\geqslant 1$，$\Delta_{i+k}w$ 独立于 F_{i-1}，而 $\Delta_{i-1}w \in F_{i-1}$。由于 $E(\Delta_i w)^2=\delta$ 和 $E_{i-1}(\Delta_{i-1}w)=\Delta_{i-1}w$，根据 β_i，β_i' 的定义及(6)得出：

$$E_{i-1}[q_i^2] = C_i\sigma_{i-1}^4\{(\Delta_{i-1}w)^2 E_{i-1}((|\Delta_i w|-\sqrt{\frac{2}{\pi}\delta})^2)+2|\Delta_{i-1}w|E_{i-1}((|\Delta_i w|-\sqrt{\frac{2}{\pi}\delta})^2)\sqrt{\frac{2}{\pi}\delta}+\frac{2}{\pi}\delta E_{i-1}(|\Delta_i w|-\sqrt{\frac{2}{\pi}\delta})^2\} = C_i\sigma_{i-1}^4\{(\Delta_{i-1}w)^2\delta(1-\frac{2}{\pi})+2|\Delta_{i-1}w|\delta(1-\frac{2}{\pi})\sqrt{\frac{2}{\pi}\delta}+\frac{2}{\pi}\delta^2(1-\frac{2}{\pi})\}$$

σ_t^4 有界，由 Barndorff-Nielsen 等[17,20]得出：

$$n\delta h\sum_{i=2}^{n+1}K_h^2(t_{i-1})\sigma_{i-1}^4(\Delta_{i-1}w)^2 = \sigma_t^4 K_2+O(\delta)+O(h)$$

$$nh\delta\sum_{i=2}^{n+1}K_h^2(t_{i-1})\sigma_{i-1}^4|\Delta_{i-1}w| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_t^4 K_2+O(\delta)+O(h)$$

由此得出：

$$S_b \equiv \sum_i E_{i-1}[q_i^2] \xrightarrow{p} (\frac{\pi^2}{4}+\pi-3)\sigma_t^4 K_2$$

对于 S_c，由于绝对值函数为多项式增长函数，对 q_i 利用 Barndorff-Nielsen 等[17,20]及核函数 K 的有界性得出 $E_{i-1}(q_i^4)\leqslant cn^2h^2\times K_h^4(t_i)n^{-4}$。由(3)和条件(K2.)得出：

$$S_c \leqslant cn^{-2}h^2\sum_i K_h^4(t_i) = cn^{-1}h^{-1}(h^3\sum_i K_h^4(t_i)\delta) \to 0$$

对于 S_d，如果 $H=w$，$E_{i-1}(\Delta_i w)=0$。$E_{i-1}(\Delta_i w|\beta_i|)=\sigma_{i-1}E_{i-1}(\Delta_i w|\Delta_i w|)=0$，类似得出 $E_{i-1}(\Delta_i w|\beta_{i-1}'|)=0$。再由 $E_{i-1}(\Delta_i w|\beta_{i-1}||\beta_{i-1}'|)=|\beta_{i-1}|E_{i-1}(\Delta_i w|\beta_{i-1}'|)=0$，得出 $E_{i-1}[q_i\Delta w]=0$，并由此得出 $S_d=0$。如果 H 是与 w 正交的有界鞅，根据 Barndorff-Nielsen 等[17]得出 $E_{i-1}[\Delta_i H(|\beta_i|-E_{i-1}|\beta_i|)]=0$，$E_{i-1}[\Delta_i H(|\beta_{i-1}'|-E_{i-2}|\beta_{i-1}'|)]=0$。因此 $E_{i-1}[q_i\Delta_i H]=0$，由此得出 $S_d=0$。

$U_t - V_t \xrightarrow{p} 0$ 的证明：由(6)得出 $E_{i-1}(|\beta_i|)E_{i-1}(|\beta_i'|)=\sigma_{i-1}^2\delta\frac{2}{\pi}$，因此：

$$U_t - V_t = \sqrt{nh}\sum_i \frac{\pi}{2}K_h(t_i)[|\beta_i||\beta_i'|-|\Delta_i p||\Delta_{i+1}p|]+\sqrt{nh}\sum_i K_h(t_i)\delta(\sigma_{i-1}^2-\sigma_t^2) \equiv D_1+D_2$$

将 D_1 变形为：

$$D_1 = \sqrt{nh}\sum_i \frac{\pi}{2}K_h(t_i)[|\beta_i|(|\beta_i'|-|\Delta_{i+1}p|)+|\Delta_{i+1}p|(|\beta_i|-|\Delta_i p|)]$$

由条件(A.)可知 σ_t 是连续 Ito 半鞅[20]。根据 Ito 半鞅连续模得出 $|\sigma_{i-1}-\sigma_i|\leqslant c[\delta\log(1/\delta)]^{1/2}$，并根据布朗运动连续模得出：

$$||\beta_i|-|\Delta_i p||\leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i}|\sigma_{t_{i-1}}-\sigma_s)|w_s ds \leqslant c[\delta\log(1/\delta)]^{1/2}\Delta_i w \leqslant c\delta\log(1/\delta)$$

类似得出 $||\beta_i'|-|\Delta_{i+1}p||\leqslant c\delta\log(1/\delta)$。由 σ_t^2 的有界性和布朗运动的性质得出，$|\beta_i|\leqslant c[\delta\log(1/\delta)]^{1/2}$，$|\Delta_i p|\leqslant c[\delta\log(1/\delta)]^{1/2}$。因此，$\delta$，$h\to 0$ 时：

$$|D_1|\leqslant c\sqrt{h\delta[\log(1/\delta)]^3}\sum_i K_h(t_i)\delta \to 0$$

对于 D_2，采用如下分解：

$$D_2 = \sqrt{nh}[\sum_i K_h(t_i)\sigma_{i-1}^2\delta-\int_0^1 K_h(s)\sigma_s^2 ds]+\sqrt{nh}[\int_0^1 K_h(s)(\sigma_s^2-\sigma_t^2)ds+O(\sqrt{h\delta}) \equiv E_1+E_2+O(\sqrt{h\delta})$$

对于 E_1，由积分中值定理、核函数的有界性、σ_t^2 的有界性以及半鞅连续模得出：

$$|E_1|\leqslant \sqrt{nh}\sum_i |K_h(t_i)\sigma_{i-1}^2\delta-\int_{t_{i-1}}^{t_i}K_h(s)\sigma_s^2 ds| \leqslant c\sqrt{nh}(\sqrt{n^{-1}\log n}+\delta)\to 0$$

其中 $t_i^* \in (t_i, t_{i+1})$。对于 E_2，根据半鞅性质得出 $|\sigma_s^2-\sigma_t^2| < C\sqrt{|s-t||\log(1/(|s-t|))|}$，$C$

为常数。条件(K1.)得出 $K(u)|u|$ 可积，加之条件(K2.) $nh^2\log(1/h)\to 0$ 得出：

$$|E_2|\leqslant\sqrt{nh}\int_0^1 K_h(s)|\sigma_s^2-\sigma_t^2|ds\leqslant C\sqrt{nh}\int_0^1 K_h(s)\sqrt{|s-t||\log(1/(|s-t|))|}ds = C\sqrt{nh^2}\int_R K(u)\sqrt{|u|}(\sqrt{\log(1/h)}+\sqrt{|\log|u||})ds \to 0$$

(ii)得证。稳态收敛能够得出分布收敛[19]，因此 $\hat{\sigma}_t^2$ 分布收敛于 σ_t^2。再由(A1.) σ_t^2 的局部有界性和(K1.)的 $K_2<\infty$ 得出渐近方差 $\alpha\sigma_t^4K_2<\infty$，因此 $\hat{\sigma}_t^2$ 以概率收敛于 σ_t^2。(i)得证。

本定理的证明与 Corsi[9]、Reno 和 Bandi[3]等核心定理的证明采用了类似的理论工具，但存在区别。Corsi、Reno 和 Bandi 构造的是已实现波动估计量，是时间区间上波动的总和，本文构造的是时点波动估计量，采用了核平滑方法，需要证明核权重的随机变量部分和的中心极限定理，其中 D_2 收敛于0的证明为新增内容。

3.2　含 Poisson 跳的资产价格时点波动估计量

资产价格过程包含 Poisson 跳时，$\hat{\sigma}_t^2$ 仍然是时点波动 σ_t^2 的一致估计。

定理2：设 p_t 为跳扩散过程，即 $dJ_t=\eta_t dN_t$，N_t 为 Poisson 过程。如果条件(A1.)、(K1.)和(K2.)满足，则对 $\forall t\in(0,1)$，有 $\hat{\sigma}_t^2\xrightarrow{p}\sigma_t^2$。

证明：设 p^c 为资产价格的连续部分，$|\Delta_i p|=|\Delta_i p^c|$ 连续扩散过程增量。设集合 $M^c=\{i|\Delta_i p=\Delta_i p^c\}$ 为资产价格连续的时间区间，$\bar{M}^c$ 为包含跳的时间区间，则：

$$\hat{\sigma}_t^2=\frac{\pi}{2}\sum_{i\in M^c}K_h(t_i)|\Delta_i p||\Delta_{i+1}p|+\frac{\pi}{2}\sum_{i\in\bar{M}^c}K_h(t_i)|\Delta_i p||\Delta_{i+1}p|$$

由 Poisson 过程的性质可知，[0,1]区间内只有有限次跳跃发生，当 $n\to\infty$ 时，相邻区间 $(t_{i-1},t_i]$ 和 $(t_i,t_{i+1}]$ 中至多有一个区间内发生跳。设跳跃发生次数为 N，最大跳幅为 M。$|\Delta_i p|$ 和 $|\Delta_{i+1}p|$ 只有一个包含跳，另一个为连续扩散过程的增量，不妨设为 $|\Delta_i p|$。对 $|\Delta_i p|$ 利用扩散过程连续模性质，再根据核函数 K 的有界性，得出：

$$\sum_{i\in\bar{M}^c}K_h(t_i)|\Delta_i p^c||\Delta_{i+1}p|\leqslant NMC\sqrt{\delta\log(1/\delta)}\to 0$$

由定理1结论(i)得出，$\hat{\sigma}_t^2$ 以概率收敛于 σ_t^2。

从定理2看出，采用双幂变差平滑构造的估计量 $\hat{\sigma}_t^2$，在资产价格存在 Poisson 跳时仍然是时点波动 σ_t^2 的一致估计。不过，资产价格存 Poisson 跳时，$\hat{\sigma}_t^2$ 收敛到 σ_t^2 的速度很慢，不能得出定理1结论(ii)，其原因在于双幂变差只能消除小幅跳跃的影响，对大幅跳跃，需要辅以门限方法。

连续扩散过程 p^c 在 δ 时间内的改变量满足 $|\Delta^c p|\leqslant c\sqrt{\delta\ln(1/\delta)}$。对于包含 Poisson 跳的跳扩散过程，选取适当的门限函数 $\vartheta(\delta)$ 对价格改变量进行过滤，将平方超过 $\vartheta(\delta)$ 的价格改变量看作跳从求和式中去掉，消除跳对时点波动估计的影响。门限函数应满足的条件为：

T. 门限函数 $\vartheta(\delta)$ 满足：$\lim_{\delta\to 0}\vartheta(\delta)=0$，$\lim_{\delta\to 0}[\delta\ln(1/\delta)]/\vartheta(\delta)=0$。

在式(2)的基础上，采用门限过滤后的双幂变差构造资产价格时点波动估计量 $\hat{\sigma}_t^{*2}$：

$$\hat{\sigma}_t^{*2}=\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^n K_h(t_i)|\Delta_i p||\Delta_{i+1}p|I_{\{(\Delta_i p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}I_{\{(\Delta_{i+1}p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}\tag{7}$$

其中 I_A 为事件A的示性函数。$\hat{\sigma}_t^{*2}$ 具有如下性质：

定理3：设资产价格过程 p_t 满足式(1)，且 $dJ_t\neq 0$。如果条件(A1.)、(A2.)、(K1.)和(T.)满足，则对 $\forall t\in(0,T)$

(i) $\hat{\sigma}_t^{*2}\xrightarrow{p}\sigma_t^2$；(ii) $\sqrt{nh}(\hat{\sigma}_t^{*2}-\sigma_t^2)\xrightarrow{sL}N(0,\alpha\sigma_t^4K_2)$。

证明：只需证明 $\sqrt{nh}(\hat{\sigma}_t^{*2}-\hat{\sigma}_t^2)\xrightarrow{a.s}0$。设 N_i 表示时间区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上跳发生次数，p^c 为资产价格过程的连续部分。当 $\delta\to 0$ 时 $(\Delta_i p)^2 I\{(\Delta_i p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}=(\Delta_i p^c)^2 a.s.$，$\sup_i(\Delta_i p^c)^2\leqslant\delta\ln(1/\delta)$[8]，因此：

$$\sum_i K_h(t_i)|\Delta_i p||\Delta_{i+1}p|I_{\{(\Delta_i p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}I_{\{(\Delta_{i+1}p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}=\sum_i K_h(t_i)|\Delta_i p||\Delta_{i+1}p|I_{\{(\Delta_i p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}I_{\{(\Delta_{i+1}p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}I_{\{N_i=0,N_{i+1}=0\}}+\sum_{t_i\neq t}K_h(t_i)|\Delta_i p||\Delta_{i+1}p|I_{\{(\Delta_i p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}I_{\{(\Delta_{i+1}p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}I_{\{N_i\neq 0\text{or }N_{i+1}\neq 0\}}$$

$$=\sum_i K_h(t_i)|\Delta_i p^c||\Delta_{i+1}p^c|+\sum_{t_i\neq t}K_h(t_i)|\Delta_i p||\Delta_{i+1}p|I_{\{N_i\neq 0\ N_{i+1}\neq 0\}}$$

设 N_T 为 $(0,T)$ 上 Poisson 跳发生次数，根据泊松过程性质 $N_T<\infty\ a.s.$，因此：

$$\sqrt{nh}(\hat{\sigma}_t^{*2}-\hat{\sigma}_t^2)=O_{a.s.}(N_T\sqrt{h}\ln(n))\to 0$$

Mancini[8]提出的门限过滤技术多用于区间上已实现波动的估计，定理 3 将这种方法用于时点波动估计量中心极限定理的证明，需要证明带核权重滤掉项的渐近可忽略性。

定理 3 中的结论是 $\delta=n^{-1}\to 0$ 的渐进结论，当 n 有限时存在跳过滤导致的有限样本偏误。偏误有两种，连续扩散过程产生的价格改变量超过门限值被当做跳错误过滤掉，Poisson 跳过程产生的价格改变量没有超过门限值而没有被过滤，前一种造成向下偏误，后一种则造成向上偏误。

3.3 跳过滤偏误及其纠正

$\hat{\sigma}_t^{*2}$ 的跳过滤偏误分为错滤和漏滤两种。设 $\Delta_i p^c$ 表示 $[t_i,t_{i-1}]$ 连续价格的改变量，$\Delta_i p^d$ 表示 $[t_i,t_{i-1}]$ 上带 Poisson 跳的价格改变量，N_i 为 $(t_i,t_{i-1}]$ 上 Poisson 跳发生次数。$\Delta_i p^c=\Delta_i pI\{N_i=0\}$，$\Delta_i p^d=\Delta_i pI\{N_i\neq 0\}$，类似于沈根祥[7]，将 $\hat{\sigma}_t^{*2}$ 求和项分解，得出错滤和漏滤成分为：

$$A1_i=|\Delta_i p^c|\,|\Delta_{i+1}p^c|\,I_{\{(\Delta_i p^c)^2>\vartheta(\delta)\text{ or }(\Delta_{i+1}p^c)^2>\vartheta(\delta)\}}$$

$$A2_i=|\Delta_i p|\,|\Delta_{i+1}p|\,I_{\{N_i\neq 0\text{ or }N_{i+1}\neq 0\}}I_{\{(\Delta_i p)^2\leqslant\vartheta(\delta),(\Delta_{i+1}p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\}}$$

其中 $A1_i$ 为错滤项，$A2_i$ 为漏滤项。对于 $A2_i$，根据 Poisson 过程的性质和沈根祥[7]得出：

$$E(A2_i)\leqslant\vartheta(\delta)P[(N_i\neq 0)\cup(N_{i+1}\neq 0)]=o(\delta)$$

对于 $A1_i$，根据 Holder 不等式和沈根祥[7]得出：

$$E(A1_i)\leqslant\sqrt{E[(\Delta_i p^c)^2I_{\{(\Delta_i p^c)^2>\vartheta(\delta)\}}]}\times\sqrt{E[(\Delta_{i+}p^c)^2I_{\{(\Delta_{i+1}p^c)^2>\vartheta(\delta)\}}]}=o(\delta)$$

错滤项和漏滤项的期望值都是 δ 的无穷小量。

尽管错滤和滤漏偏误都是无穷小量，但前者趋于 0 的速度远低于后者[7]。为减少偏误，对错滤进行纠偏。具体做法是当 $(\Delta_i p^c)^2>\vartheta(\delta)$ 时，用附近区间上价格改变量绝对值 $|\Delta_{i\pm k}p|,k=1,2$ 的中位数代替 $|\Delta_i p|$。此外，估计式的权重项 $K_h(t_i)$ 是核函数积分的离散化，和并不等于 1，为减少偏误，将(7)式关于权重标准化，得出跳错滤纠偏后时点波动估计量：

$$\hat{\sigma}_t^{*2}=\frac{\sum_{i=1}^n K_h(t_i)\frac{\pi}{2}|\Delta_i z|\,|\Delta_{i+1}z|}{\sum_{i=1}^n K_h(t_i)\delta},\ \Delta_i z=\begin{cases}\Delta_i p,(\Delta_i p)^2\leqslant\vartheta(\delta)\\ \mathrm{med}(|\Delta_{i\pm 2}p|,|\Delta_{i\pm 1}p|),(\Delta_i p)^2\geqslant\vartheta(\delta)\end{cases}\quad(8)$$

其中 med 表示中位数。作为滤掉价格改变量的补足，采用中位数比采用平均值更稳健[7]。

3.4 与其他估计量的比较

二阶变差为基础时点波动估计量以沈根祥[7]最为一般，这里仅将本文提出的估计量与之进行比较。沈根祥[7]采用二阶变差 $(\Delta_i p)^2$ 构造时点波动估计量，并以附近样本值均值作为跳错滤的补足项，用 $\hat{\sigma}_s^2$ 表示。$\hat{\sigma}^{*2}$ 与 $\hat{\sigma}_s^2$ 有两点不同：一是对跳错滤的纠偏方法不同，二是构造估计量采用的变差形式不同。中位数比均值更不容易受到异常值的影响，$\hat{\sigma}^{*2}$ 采用的跳错滤纠偏方法更为稳健。$\hat{\sigma}^{*2}$ 与 $\hat{\sigma}_s^2$ 的本质区别在于采用了双幂变差构造估计量，更为有效减少跳漏滤偏误。漏滤发生时点无法确定，不能进行纠偏。为尽量减少错滤发生导致的偏误，门限函数趋向于取较大值，导致漏滤发生概率增大。漏滤偏误的大小是时点波动估计优劣的关键，$\hat{\sigma}^{*2}$ 求和式的双幂变差能够有效降低漏滤偏误，与 $\hat{\sigma}_s^2$ 相比具有实质优越性。设跳跃发生区间为 $(t_{i-1},t_i]$，跳产生的价格改变量为 $\Delta_i p$。对于小跳，$\hat{\sigma}^{*2}$ 与 $\hat{\sigma}_s^2$ 的漏滤偏误项分别为 $(\Delta_i p)^2$ 和 $|\Delta_i p|\,|\Delta_{i+1}p|$，根据 Poisson 过程的性质，当时间间隔 δ 很小时，相邻两个区间同时发生跳的概率趋于 0，因此 $(t_i,t_{i+1}]$ 上不会发生跳跃，$\Delta_{i+1}p$ 是连续价格的改变量，因此 $(\Delta p_i)^2>>|\Delta_i p|\,|\Delta_{i+1}p|\to 0$。由此看出，采用相邻区间价格改变量乘积构造的估计量，漏滤偏误远小于采用价格改变量平方构造的估计量。

3.5 最优带宽和核函数

本文采用沈根祥[7]中的方法确定最优带宽参数 C，其中去一估计（Leave-one-out Estimation）$\hat{\sigma}^2_{-i,ti-1}$ 采用(7)式计算，$\hat{\sigma}^4_{-i,t}$ 仍用 Christensen 给出的方法计算。核函数仍采用二次核函数。

4 蒙特卡洛模拟

本部分通过随机模拟来评价时点方差估计量的效果，考察 Poisson 跳对时点波动估计的影响以及时点波动估计量的有限样本表现。

4.1 模拟数据

设数据生成过程为带跳的随机波动模型，收益模型为包含 Poisson 跳的跳扩散过程，由于漂移项对时点波动估计量的渐进性质没有影响，故设 $\mu_t=0$。波动模型采用平方根过程以保证 σ_t^2 取正值。

表 1　滤偏误比较

λ	ρ / Bias	-0.25 $\hat{\sigma}^{*2}$	-0.25 $\hat{\sigma}_S^2$	-0.50 $\hat{\sigma}^{*2}$	-0.50 $\hat{\sigma}_S^2$	-0.75 $\hat{\sigma}^{*2}$	-0.75 $\hat{\sigma}_S^2$
1/24	Bias1	0.938	2.134	3.2398	6.9419	2.9799	6.6611
	Bias2	18.38	47.94	19.544	49.311	20.1481	50.7782
1/48	Bias1	0.3996	0.8718	1.3836	3.1666	1.3073	3.0117
	Bias2	4.278	10.663	4.9852	13.0249	4.7382	12.5730
1/144	Bias1	0.1198	0.2904	0.1219	0.3229	0.5412	1.1666
	Bias2	0.5124	1.5592	0.6141	1.6923	1.0215	2.3692
1/240	Bias1	0.0710	0.1592	0.3079	0.6717	0.3103	0.6728
	Bias2	0.2493	0.6234	0.4764	1.0695	0.5359	1.3024

杠杆效应通过价格过程布朗运动 w 和波动过程布朗运动 B 的相关性来刻画，相关系数为 ρ。模拟以沪深 300 指数日内五分钟交易为对象，时间跨度为一年。参数取值与模拟数据产生的步骤与沈根祥[7]相同。

4.2　最优带宽和门限函数

本文采用沈根祥[7]中带宽参数的确定方法，取带宽为 $h = Cn^{-0.4999}$。交叉验证表明，对应 ρ 值 -0.25、-0.5 和 -0.75 的最优带宽参数 c_0 分别为 1.70、0.45 和 0.50，并且不受跳频度参数 λ 的影响。选取合适的门限函数有利于减少有限样本偏误。本文采用沈根祥[7]的门限函数 $\vartheta(\delta) = 12000^{-0.99} \approx 8.95 \times 10^{-4}$。

4.3　时点波动估计跳漏滤偏误比较

为了对时点波动估计量跳漏滤偏误进行比较，对参数取不同值的每一种情况各模拟 100 条样本轨道，计算 $\hat{\sigma}^{*2}$ 和 $\hat{\sigma}_s^2$ 的单个路径累积偏误均值和平均路径累积偏误均值，并进行比较。单个路径累积偏误均值(Bias1)和平均路径累积偏误(Bias2)，具体定义参考沈根祥[7]。表 1 给出了不同参数取值下 $\hat{\sigma}^{*2}$ 和 $\hat{\sigma}_s^2$ 的漏滤偏误计算结果：

对表 1 中结果给出如下解释：

$\hat{\sigma}^{*2}$ 漏滤偏误小于 $\hat{\sigma}_s^2$：以单个路径累积偏误均值(Bias1)和平均路径累积偏误(Bias2)为标准，在所有情况下 $\hat{\sigma}^{*2}$ 的漏滤偏误均明显小于 $\hat{\sigma}_s^2$，不到 $\hat{\sigma}_s^2$ 的二分之一。由此看出，本文给出的时点波动估计量显著减少了跳过滤产生的漏滤偏误。

跳频度对漏滤偏误的影响：跳频度对漏滤偏误有显著影响，频度越高，漏滤偏误越大。从表 1 中看出，λ 的值从 1/240(每周发生一次跳)逐渐增加 1/24(每两个小时发生一次跳)时，对应的漏滤偏误随之增加。跳频度增加时，跳发生次数增加，漏滤发生次数增加，导致漏滤偏误增加。

杠杆效应对漏滤偏误的影响：杠杆效应强度影响漏滤偏误，杠杆效应越强，漏滤偏误增大。从表 1 中看出，ρ 的大小从 0.25 增加到 0.75 时，对应的漏滤偏误在大多情况下是增加的，只有在 $\lambda = 1/24$ 对应的 ρ 从 0.5 增加到 0.75 时，Bias1 有稍微减少，以及 $\lambda = 1/48$ 对应的 ρ 从 0.5 增加到 0.75 时，Bias 有稍微减少(表 1 中的下划线数据)。

5　实证分析—基于 VaR 测度的时点波动估计比较

为比较时点波动估计方法在实际数据上的效果，采用随机波动模型计算资产收益的在险值(Value at Risk，下称 VaR)序列，通过 VaR 测度精确值的后验测试比较两种时点波动估计方法的优劣。VaR 的计算的核心是资产收益条件方差的计算。设资产价格的对数收益率服从模型 $r_t = \mu + \sqrt{\sigma_t^2}\varepsilon_t$，$\sigma_t^2$ 为 r_t 的条件方差，ε_t 为独立同分布的扰动项序列，为充分刻画时点波动估计误差带来的厚尾性，将 ε_t 的分布设定为广义误差分布(下称 GED)，密度函数为：

$$f_\varepsilon(\varepsilon \mid \alpha,\beta) = \frac{\beta}{2^{[(\beta+1)/\beta]}\alpha\Gamma(1/\beta)}\exp\left[-\frac{1}{2} \mid \varepsilon/\alpha \mid^{\beta}\right],\alpha = \left[\frac{2^{-2/\beta}\Gamma(1/\beta)}{\Gamma(3/\beta)}\right]^{1/2},\beta > 0$$

GED 分布为对称分布，均值为 0，$\beta < 2$ 时比正态分布有更厚的尾部，$\beta = 2$ 时 GED 分布为正态分布，$\beta \to \infty$ 时，GED 的极限分布为 $[-3^{1/2}, 3^{1/2}]$ 上的均匀分布，据此可以充分刻画金融数据的厚尾性。

r_t 的概率为 p 的 VaR 定义为 $P[r_t \leqslant VaR_t] = p$，在误差项服从 GED 分布的情况下，$VaR_t = zp\sigma_t$，$zp$ 为 ε 分布的 $1-p$ 分位数，可通过数值积分获得，σ_t 用时点波动估计量 $\hat{\sigma}_t$ 代替。采用 Kupiec[21]提出的失败率检验和似然比检验，可以对 VaR 测度的精确性进行后验检验。定义损失序列

LS_t 为：

$$LS_t = \begin{cases} 1, \text{如果 } r_t < VaR_t \\ 0, \text{如果 } r_t \geqslant VaR_t \end{cases},$$

设 N_0 为 r_t 序列中 LS_t 取 0 的个数，N_1 为 LS_t 取 1 的个数，$N = N_0 + N_1$ 为序列长度，$\tau = N_1/N$ 称为失败率，τ 越接近 p 表明 VaR 估计越精确。据此 Kupiec 构造极大似然比检验统计量 LR：

$$LR = -2(\ln[(1-p)^{N_0} p^{N_1}] - \ln[(1-\tau)^{N_0} \tau^{N_1}])$$

在原假设 $H_0: \tau = p$ 下，$LR \sim \chi^2(1)$。

选取沪深 300 指数 2010.1.4～2014.12.31 期间日内 10 分钟高频交易数据为样本进行实证分析，样本量为 $n = 30250$。10 分钟数据中微观结构噪音较少，不会对估计结果造成实质影响。经计算，最优带宽参数为 $h = 0.15 * 30250^{1/2} = 26.1$。从 $\hat{\sigma}_t^{*2}$ 和 $\hat{\sigma}_S^2(t)$ 得出标准误序列估计 $\hat{\sigma}^*(t)$ 和 $\hat{\sigma}_S(t)$。

以 $r_t = \mu + \hat{\sigma}\varepsilon_t$ 为估计模型，对 ε_t 分布中参数 μ 和 β 进行极大似然估计，估计结果为 $\hat{\beta} = 1.204$，对应的 t 统计量的值为 160.6，据此计算出的 ε_t 分布峰度为 7.2，远大于正态分布峰度 3。将 β 估计值带入密度函数，采用近似积分方法计算分布函数，得出 GED 分布对应 $p = 0.25, 0.05, 0.01$ 的 $1-p$ 分位数分别是 $z_{0.05} = 1.640$、$z_{0.025} = 2.090$ 和 $z_{0.01} = 2.653$。

以 $\mathrm{VaR}_t^* = zp\hat{\sigma}^*(t)$ 和 $\mathrm{VaR}_t^S = zp\hat{\sigma}_S(t)$ 分别得出以门限双幂变差时点波动估计和门限幂变差时点波动估计计算的 t 处在险值，LS_t 和 $LS_t^{(S)}$ 为对应的损失序列，N_0, N_1 为 LS_t 序列中 0 和 1 的个数，

$N_0^{(S)}, N_1^{(S)}$ 为 $LS_t^{(S)}$ 序列中 0 和 1 的个数，$\tau = N_1/N$ 和 $\tau_S = N_1^{(S)}/N$ 为对应的失败率，LR 和 $LR^{(S)}$ 为据此构造的 Kupiec 似然比检验统计量的值，与 $\chi^2(1)$ 在不同显著水平下临界值相比，得出拒绝或者接受原假设的结论。具体计算结果见表 2。

表 2 VaR 精度比较

置信水平	检验统计量	$\mathrm{VaR}_t^* = zp\hat{\sigma}^*(t)$	$\mathrm{VaR}_t^S = zp\hat{\sigma}_S(t)$
0.05	失败率 τ	0.0538	0.0614
	似然比 LR	8.91**	77.253**
0.025	失败率 τ	0.02479	0.02351
	似然比 LR	6.074	41.75**
0.01	失败率 τ	0.0103	0.0133
	似然比 LR	5.673	19.822**

**表示已 0.01 显著水平拒绝原假设。

从表 2 可出，在三种置信水平下，用门限二次变差估计时点波动 $\hat{\sigma}_{(S)}^2$ 计算的动态 VaR 值不能通过 Kupiec 检验，用门限双幂变差估计时点波动 $\hat{\sigma}^2$ 计算的动态 VaR 的值只在置信水平 0.05 下不能通过 Kupiec 检验。三种情况下 $\hat{\sigma}^2$ 计算的失败率都比 $\hat{\sigma}_{(S)}^2$ 计算的失败率更接近于置信水平，表明在各个置信水平上，$\hat{\sigma}^2$ 刻画资产收益风险的能力比 $\hat{\sigma}_{(S)}^2$ 有显著增强。

6 结语

本文以价格改变量的双幂变差为基础，给出一类新的资产价格时点波动估计量，显著减少跳过滤带来的漏滤偏误。采用随机阵列中心极限定理，本文得出估计量的一致性和渐进正态性。蒙特卡洛随机模拟的结果表明，无论是以单路径累积偏误均值为标准，还是以平均路径累积偏误为标准，本文给出估计量的漏滤偏误在所有情况下都显著小于以二次变差为基础构造的时点波动估计量，使跳扩散过程资产价格时点波动估计量的性质得到实质性改进。基于沪深 300 指数的 VaR 精度 kupiec 检验进一步表明，与门限二次变差时点波动估计相比，本文给出的时点波动估计更能刻画资产收益的风险特征。

参考文献：

[1] Fan Jianqing, Wang Yazhen. Spot volatility estimation for high-frequency data[J]. Statistics and its Interface, 2008,1(2):279－288.

[2] Kristensen D. Nonparametric filtering of the realized spot volatility: A kernel-based approach[J]. Econometric Theory, 2010,26(1): 60－93.

[3] Bandi M, Reno R. Time-varying leverage effects[J]. Journal of Econometrics, 2012, 169(1):94－113.

[4] Bollerslev T, Todorov V. Estimation of jump tails[J]. Econometrica, 2011, 79(6):1727－1783.

[5] Ait-Sahalia Y, Fan Jianqing, Li Yazhen. The leverage effect puzzle: Disentangling sources of bias at high frequency[J]. Journal of Financial Economics, 2013, 109(1):224－249.

[6] 沈根祥. 沪深 300 指数跳的逐点检验及动态分析[J]. 中国管理科学,2012, 20(1):43－50.

[7] 沈根祥. 带 Poisson 跳和杠杆效应的资产价格时点波动非参数估计[J]. 数量经济技术经济研究,2012, 29(12):82－96.

[8] Mancini C. Non-parametric threshold estimation for

models with stochastic diffusion coefficient and jumps [J]. Scandinavian Journal of Statistics, 2009, 36(2): 270－296.

[9] Corsi F, Pirin D, Reno R. Threshold bipower variation and the impact of jumps on volatility forecasting[J]. Journal of Econometrics, 2010, 159(2):276－288.

[10] 陈浪南，孙坚强. 股票市场资产收益的跳跃行为研究[J]. 经济研究，2010,(4):54－66.

[11] 刘志东，陈晓静. 无限活动纯跳跃 Levy 金融资产价格模型及其 CF-CGMM 参数估计与应用[J]. 系统管理学报，2010, 19(4):428－438.

[12] 王春峰，姚宁，房振明，等. 中国股市已实现波动率的跳跃行为研究[J]. 系统工程，2008, 26(2):1－6.

[13] 陈国进，王占海. 我国股票市场连续性波动与跳跃性波动实证研究[J]. 系统工程理论与实践，2010, 30(9): 1554－1562.

[14] 杨科，陈浪南. 基于 C-TMPV 的中国股市高频波动率的跳跃行为研究[J]. 管理科学，2011, 24(2):103－112.

[15] Lee S S, Mykland P A. Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics[J]. Review of Financial Studies, 2008,21(6): 2535－2563.

[16] 杨科，田凤平，林洪. 跳跃的估计、股市波动率的预测以及预测精度评价[J]. 中国管理科学，2013,21(3):50－60.

[17] Barndorff-Nielsen O E, Shephard N. Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation[J]. Journal of Financial Econometrics, 2006, 4(1):1－30.

[18] Mykland P A, Zhang Lan. The econometrics of high-frequency data[M]// Kessler M, Lindner A, Sorensen M. Statistical methods for stochastic differential equations, United Kingdom: Talor & Francis, LLC, 2012.

[19] Jacod J, Shiryaev N. Limit theorems for stochastic processes[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2003.

[20] Barndorff-Nielsen O, Graversen S, Jocod J, et al. A central limit theorem for realized power and bipower variations of continuous martingales[M]//Kabanov Y, Lipster R, Stoyanov J. From stochastic calculus to mathematical finance. Heidelberg: Springer, 2006: 33－68.

[21] Kupiec P. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models[J]. Journal of Derivatives, 1995, 3(2):73－84.

Nonparametric Estimation for Spot Volatility of Asset Price Using Bipower Variations

SHEN Gen-xiang[1,2]

(1. School of Econmics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China;
2. Key Laboratory of Mathematical Ecnomics(SUFE), Ministry of Education, Shanghai 200433, China)

Abstract: The threshold jump-annihilating method to estimate spot volatility of jump-diffusion asset price processes can miss the small jumps and bring about upward bias[Corsi & Reno, JoE 2010]. In this paper, a new spot volatility estimator of asset prices is proposed based on bipower variation that reduces significantly finite-sample upward bias from jump-filtering-missing. The consistency and asymptotic normality is established. An extensive Monte Carlo simulation shows that the estimator in the paper outperforms the others in literature. The empirical study using Kupiec test based on sample from CSI300 shows that our spot volatility estimator can capture the feather of market risk more accurately.

Key words: Spot Volatility; Poisson Jumps; Bipower Variation; Kernel Smoothing