

文章编号: 1000-4750(2016)02-0088-08

基于 Winkler 地基 Timoshenko 梁理论的 十字交叉条形基础节点荷载分配分析

夏桂云^{1,2}, 曾庆元²

(1. 长沙理工大学土木与建筑学院, 长沙 410004; 2. 中南大学土木工程学院, 长沙 410075)

摘 要: 考虑十字交叉条形基础截面剪切变形影响, 利用 Winkler 地基 Timoshenko 梁无限长梁在集中力、集中力偶作用下的变形和内力关系, 推导了带悬挑的半无限长梁的集中力、集中力偶作用下的悬挑系数计算公式。当条形基础抗剪刚度趋于无穷大时可退化成不考虑剪切变形影响的 Euler 梁理论结果, 因此该文公式是一种通用公式。剪切变形对集中力的悬挑系数影响大、对集中力偶的悬挑系数影响小。对于节点较密、截面尺寸较大、对变形敏感的十字交叉条形基础, 应该考虑截面的剪切变形影响。根据静力平衡条件和变形协调条件, 建立了可同时考虑截面剪切变形和节点集中力、集中力偶作用的带悬挑十字交叉条形基础的节点荷载分配的统一公式。算例结果显示: 虽然节点处作用的集中力偶较小, 但其可以改变竖向荷载在节点 x 、 y 两方向上的分配, 力偶数值越大, 影响越明显。考虑条形基础截面剪切变形影响后, 计算的节点荷载分配更均匀。

关键词: Timoshenko 梁; 剪切变形; 十字交叉基础; 节点荷载分配; 悬挑系数

中图分类号: TU470 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.06.0560

ANALYSIS OF NODAL LOAD DISTRIBUTION OF CROSSED FOUNDATION BEAM BASED ON THE THEORY OF TIMOSHENKO BEAM ON WINKLER FOUNDATION

XIA Gui-yun^{1,2}, ZENG Qing-yuan²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410004, China;

2. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Considering the shear deformation effect of crossed foundation beams, and using the relationship between the load and deformation of an infinite length Timoshenko beam on Winkler foundation acted by a concentrated load and a moment, the cantilevering coefficients of a semi-infinite length Timoshenko beam on Winkler foundation acted by a concentrated load and a moment were derived. When the shear stiffness of a Timoshenko beam became into infinite, the cantilevering coefficients can be degenerated into those of an Euler beam without considering the shear deformation effect. Thus, the present formula was very general. The influence of shear deformation effect on the cantilevering coefficient of a concentrated load was great, and of concentrated moment was little. For those of the crossed foundations with dense nodes, large sectional dimensions, and sensitive to deflection, the shear deformation effect must be considered. According to static equilibrium conditions and deformation compatibility, the general formulae of nodal load distribution of a crossed foundation beam with cantilever were established, which can incorporate both the shear deformation effect and concentrated load & moment at the same time. Examples show that although the concentrated moment acted on the crossed foundation is small, but it can change the load distribution along the x , y axis. The larger of

收稿日期: 2014-06-30; 修改日期: 2015-03-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(51278072); 中国博士后科学基金项目(2012M521555); 湖南省学位与研究生教育教研教改项目(JG2012B031)

通讯作者: 夏桂云(1972—), 男, 湖南湘阴人, 教授, 博士, 主要从事剪切变形对结构影响、预应力砼箱梁结构理论研究(E-mail: xiagy72@163.com).

作者简介: 曾庆元(1925—), 男, 江西泰安人, 教授, 博导, 中国工程院院士, 主要从事列车脱轨研究(E-mail: zengqy@cae.cn).

the concentrated moment, the more apparent of the influence. Considering the shear deformation effect, nodal load distribution becomes more uniform by calculations.

Key words: Timoshenko beam; shear deformation; crossed foundation; nodal load distribution; cantilevering coefficient

十字交叉条形基础在高层建筑中应用非常广泛,其节点荷载在纵横向两个方向上的分配是一个经典问题,目前有多种分析方法。程文灏等^[1]将十字交叉条形基础分为中柱节点、边柱节点和角柱节点,根据节点的静力平衡条件及变形协调条件,提出了节点荷载分配公式,此公式的原理简单、计算便捷、适应面广,其建立时通常引入4条基本假定:1) Winkler 地基假定;2) 节点变形不考虑相邻节点荷载的影响;3) 受力模式分为无限长梁和半无限长梁两种;4) 不考虑地基梁的扭转影响,节点处纵横向基础铰接,即一个方向的条形基础的扭转不影响另一个方向条形基础的挠曲和内力。李方圆^[2]建立 Winkler 地基上十字交叉基础的包含有限长梁及节点不在梁端的半无限长梁的节点荷载分配的一般理论,推导了4种节点荷载分配公式,该成果解决了带悬挑梁的十字交叉条形基础的节点荷载分配问题。朱彦鹏等^[3-4]从有限元的角度出发,将地基支撑对条形基础梁的弯曲、扭转影响一并考虑,推导了包含地基刚度、梁刚度和刚域影响的单元综合刚度矩阵,建立了带有刚域的弹性地基梁的有限元方法,较好地解决了十字交叉条形基础的内力计算和设计问题。陈沙和王贻荪^[5]基于 Winkler 地基 Euler 无限长梁的理论,推导出十字交叉条形基础的悬挑系数和具有悬挑的节点荷载分配的计算公式,该公式适用于各种节点和悬挑情况,且只引入一个统一的悬挑系数。邱畅和王贻荪^[6]基于双参数地基 Euler 无限长梁的理论,进一步推导出十字交叉条形基础的悬挑系数和具有悬挑的节点荷载分配的计算公式,所建立的公式适用于各种节点和悬挑情况,算例结果显示不同地基模型对内力有重要影响。秦植海等^[7]给出了合理的重叠基底反力调整方法及计算公式,并通过算例对节点力调整前后基底反力及内力的变化进行了对比。He^[8]基于弹性梁理论和 Boussinesq 解,将弹性地基上的十字交叉条形基础分开为两个方向的梁,通过梁与地基以及梁与梁之间的静力与位移平衡协调分析,得出了十字交叉条形基础与地基共同作用的半解析解。同时对十字交叉条形基础与地基共同作用的影响因素进行了分析,算例表明所建立的方法收敛性好,计算速

度快,精度可靠。刘开国^[9]、李从林和赵建昌^[10]、孙建琴等^[11]研究了高层结构与十字交叉条形基础的相互作用问题,但由于相互作用问题非常复杂,在实际应用中不方便,节点荷载分配法仍是目前十字交叉条形基础的主流分析方法。但是该方法存在不足:1) 十字交叉条形基础节点较密、梁截面尺寸较大,采用初等梁理论进行分析没有考虑截面的剪切变形影响,剪切变形对节点荷载分配有多大影响目前没有定论;2) 十字交叉条形基础中边柱和角柱都是带悬挑的条形基础,悬挑结构对条形基础的受力有何影响目前没有深入研究;3) 十字交叉条形基础中节点一般有集中力偶作用,集中力偶影响节点的变形,进而影响节点荷载的分配,常规分析中忽略集中力偶对节点荷载分配的影响是否合适目前相关的研究工作还不多。考虑到这些不足或研究不深入问题,本文拟采用 Winkler 地基上能考虑截面剪切变形影响的 Timoshenko 梁理论来建立条形基础的集中力和集中力偶的悬挑系数。相比 Euler 梁理论中截面有剪切应力、但剪切应变为零,剪切本构关系矛盾, Timoshenko 梁理论在截面上的剪切应力与剪切应变本构关系在平均意义上得到了满足,因而理论更完备,适应性更广,对完善十字交叉条形基础节点荷载分配的计算理论有积极意义。针对常规方法只针对竖向集中力的分配,本文根据静力平衡条件和位移协调条件,导出可考虑节点集中力和集中力偶作用、截面剪切变形影响的节点荷载分配的计算公式,以促进十字交叉条形基础分析理论的发展。

1 Winkler 地基上 Timoshenko 无限长梁的解析解

Winkler 地基上 Timoshenko 深梁的微元体如下图 1 所示。

其平衡方程如下式所示^[12-13]:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[C \left(\frac{dw}{dx} - \psi \right) \right] + Kw = q \\ -\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\psi}{dx} \right) - C \left(\frac{dw}{dx} - \psi \right) = m \end{cases} \quad (1)$$

式中： $K = k_0 b$ ， k_0 为地基的基床系数， b 为梁底宽度； $D = EI$ 为基础梁的抗弯刚度； $C = uGA$ 为基础梁的抗剪刚度， u 为基础梁截面的剪切修正系数； q 为竖向分布荷载； m 为分布弯矩； w 为梁的挠度； ψ 为梁的转角。

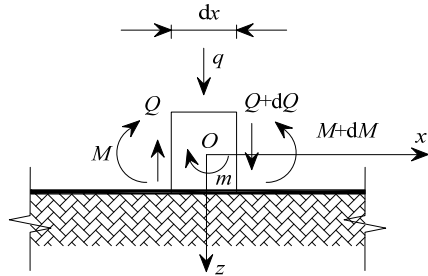


图1 Winkler地基 Timoshenko 梁模型

Fig.1 Model of Timoshenko beam on Winkler foundation

为方便建立和推导 Winkler 地基 Timoshenko 半无限长梁的悬挑系数，本文首先分析 Winkler 地基 Timoshenko 无限长梁在集中力和集中力偶作用下的解析解。

如图2所示的无限长梁在坐标原点 O 处受集中力 P 作用，其挠度 w 、转角 ψ 、剪力 Q 和弯矩 M 的解析解^[12]如下式所示：

$$\begin{cases} w = \frac{P\alpha}{4K} \cdot F_1(x), & \psi = -\frac{P}{4D\alpha\beta} \cdot F_2(x) \\ Q = -\frac{P}{2} \cdot F_3(x), & M = \frac{P}{4\alpha} \cdot F_4(x) \end{cases} \quad (2)$$

式中：

$$F_1(x) = e^{-\alpha x} \left[\frac{(3\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2} \cos \beta x + \frac{(3\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha\beta} \sin \beta x \right];$$

$$F_2(x) = e^{-\alpha x} \sin \beta x;$$

$$F_3(x) = e^{-\alpha x} \left[\cos \beta x + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{2\alpha\beta} \sin \beta x \right];$$

$$F_4(x) = e^{-\alpha x} \left[\cos \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x \right].$$

其中：

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\frac{K}{4D} + \frac{K}{4C}}, \quad \beta = \sqrt{\sqrt{\frac{K}{4D} - \frac{K}{4C}}}$$

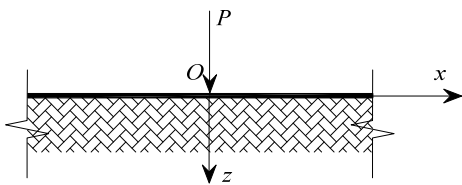


图2 无限长梁在集中力 P 作用

Fig.2 Infinite length beam acted by concentrated load P

如图3所示的无限长梁在坐标原点 O 处受集中力偶 M 作用时，其变形和内力的解析解^[12]如下式所示：

$$\begin{cases} w = \frac{M}{4D\alpha\beta} \cdot F_5(x), & \psi = \frac{M\alpha}{4D(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot F_5(x) \\ Q = -\frac{M(\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha} \cdot F_6(x), & M = \frac{M}{2} \cdot F_7(x) \end{cases} \quad (3)$$

式中：

$$F_5(x) = e^{-\alpha x} \left[\frac{(3\alpha^3 - \beta^2)}{\alpha^2} \cos \beta x - \frac{(3\beta^3 - \alpha^2)}{\alpha\beta} \sin \beta x \right];$$

$$F_6(x) = e^{-\alpha x} \left[\cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x \right];$$

$$F_7(x) = e^{-\alpha x} \left[\cos \beta x + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} \sin \beta x \right].$$

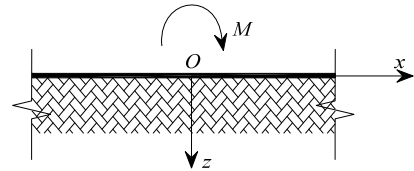


图3 无限长梁在集中力偶 M 作用

Fig.3 Infinite length beam acted by concentrated moment M

2 条形基础在集中力 P 作用下的悬挑系数

如图4所示，半无限长梁在 O 点作用有集中力 P ，悬挑端点 A 距 O 点长 L 。

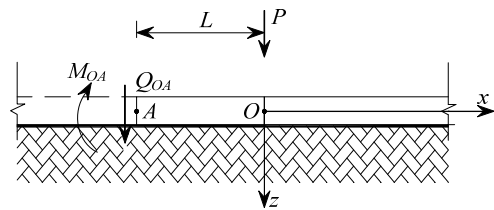


图4 集中力作用带悬挑半无限长梁计算模型

Fig.4 Calculating model of semi-infinite length beam with cantilever acted by concentrated load

O 点的变形可利用无限长梁的解析解进行推导。设想半无限长梁从 A 点向外无限延长，形成无限长梁，荷载 P 在截面 A 产生弯矩 M_A 和剪力 Q_A ，由于原半无限长梁在 A 截面的弯矩和剪力为 0，故在无限长梁 A 截面处引入假想弯矩 M_{OA} 和剪力 Q_{OA} 。

根据式(2)和内力的对称性，荷载 P 在截面 A 处产生的内力为：

$$Q_A = \frac{P}{2} \cdot F_3(L), \quad M_A = \frac{P}{4\alpha} \cdot F_4(L) \quad (4)$$

无限长梁在假想剪力 Q_{OA} 加载下，根据式(2)

知, 在 A 点产生的剪力为 $-\frac{Q_{OA}}{2}$ 、弯矩为 $\frac{Q_{OA}}{4\alpha}$, 假想弯矩 M_{OA} 加载下, 在 A 点产生的剪力为 $-\frac{M_{OA}(\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha}$ 、弯矩为 $\frac{M_{OA}}{2}$ 。

由 A 点截面的剪力和弯矩平衡条件有:

$$\begin{cases} -\frac{Q_{OA}}{2} - \frac{M_{OA}(\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha} + Q_A = 0 \\ \frac{Q_{OA}}{4\alpha} + \frac{M_{OA}}{2} + M_A = 0 \end{cases} \quad (5)$$

解得:

$$\begin{cases} M_{OA} = -\frac{2\alpha \cdot P}{3\alpha^2 - \beta^2} \cdot [F_3(L) + F_4(L)] \\ Q_{OA} = \frac{P}{3\alpha^2 - \beta^2} \cdot [4\alpha^2 \cdot F_3(L) + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot F_4(L)] \end{cases} \quad (6)$$

带悬挑长度为 L 的半无限长梁 O 点的挠度为无限长梁 O 点集中荷载 P 、 A 截面剪力 Q_{OA} 、弯矩 M_{OA} 共同作用下在 O 点产生的挠度。3 种荷载作用下的挠度可利用式(2)、式(3)进行计算, 经推导为:

$$w = \frac{\alpha P}{4K} \left\{ F_1(0) + F_1(L) \left[\frac{4\alpha^2 \cdot F_3(L)}{3\alpha^2 - \beta^2} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot F_4(L)}{3\alpha^2 - \beta^2} \right] - \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} \cdot [F_3(L) + F_4(L)] \cdot F_2(L) \right\} \quad (7)$$

式(7)即为带悬挑的十字交叉基础在 O 点集中力 P 作用下的挠度, 为方便与不考虑剪切变形影响的 Euler 梁理论进行比较, 引入 Winkler 地基 Euler 梁的计算参数 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4D}}$, 则考虑剪切变形影响时的计算参数可用 λ 表示为:

$$\alpha = \lambda\sqrt{1+\psi}, \quad \beta = \lambda\sqrt{1-\psi}, \quad \psi = \frac{\lambda^2 D}{C} \quad (8)$$

将式(7)改成与文献[4-5]相似的悬挑系数定义公式, 有:

$$w = \frac{\lambda P}{2K} \varphi(\lambda, \alpha, \beta, L) \quad (9)$$

式中的悬挑系数表达式为:

$$\varphi(\lambda, \alpha, \beta, L) = \frac{\alpha F_1(0)}{2\lambda} + \frac{\alpha F_1(L)}{2\lambda} \left[\frac{4\alpha^2 \cdot F_3(L)}{3\alpha^2 - \beta^2} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot F_4(L)}{3\alpha^2 - \beta^2} \right] - \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\alpha\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} \times [F_3(L) + F_4(L)] \cdot F_2(L)$$

根据式(8)、Timoshenko 梁理论可知, 当梁的抗剪刚度 $C \rightarrow \infty$ 时, Timoshenko 梁理论退化成不考虑剪切变形影响的 Euler 梁理论, 此时 $\psi = 0$, $\alpha = \beta = \lambda$ 。

由式(8)及 Winkler 地基梁的特性可知, 式(8)中 $\psi \leq 1.0$ 。当 ψ 取 1.0、0.9、0.7、0.5、0.3、0.1、0.05、0.01、0.001 时, 悬挑系数 φ 随计算参数 λL 的变化如图 5 所示。

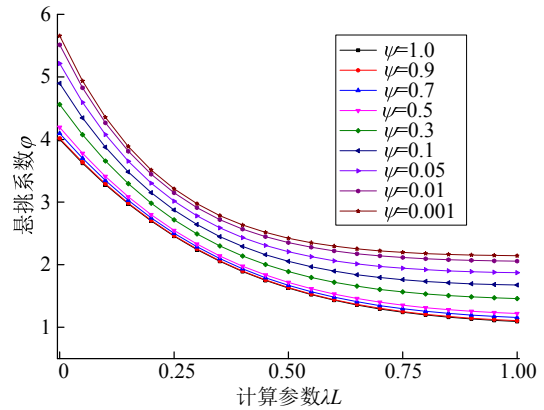


图 5 悬挑系数随计算参数 λL 的变化

Fig.5 Cantilevering coefficient changing with calculating parameter λL

计算中发现, 当 $\psi \leq 0.001$ 后, 悬挑系数随计算参数 λL 的变化与 $\psi = 0$ 时的结果一致, 此时是不考虑条形基础截面剪切变形影响的 Euler 退化结果^[5]。

从图 5 还可以看出, 不论计算参数 ψ 取何值, 当计算参数 $\lambda L = 0$ 时, 悬挑梁退化成半无限长梁, 不考虑条形基础梁截面剪切变形影响时的悬挑系数 $\varphi_E = 4$ ^[5], 考虑条形基础梁截面剪切变形影响时的悬挑系数为:

$$\varphi_T = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 D}{C}} \cdot \varphi_E \quad (10)$$

当 $\psi = 1$ 时, $\frac{\varphi_T}{\varphi_E} = \sqrt{2}$, 两者间相差 41.42% 倍, 由

此可见, 十字交叉条形基础截面剪切变形对悬挑系数影响较大, 尤其是纵、横梁截面相差悬殊时, 应该考虑截面剪切变形的影响。当条形基础梁截面的抗剪刚度 $C \rightarrow \infty$ 时, 式(9)可退化成不考虑截面剪切变形影响的 Euler 梁理论结果, 本文公式具有一定的通用性。

3 条形基础在集中力偶 M 作用的悬挑系数

带悬挑的条形基础在集中力偶 M 作用下的节点

挠度计算公式推导与前一致,也是将半无限长梁从 A 点向外无限延长,形成无限长梁,集中力偶 M 在截面 A 产生的弯矩 M_A 和剪力 Q_A ,由于原半无限长梁在 A 截面的弯矩和剪力为零,故在无限长梁 A 截面处引入假想弯矩 M_{OA} 和剪力 Q_{OA} ,如图 6 所示。

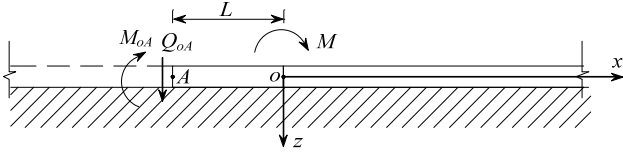


图 6 集中力偶作用带悬挑半无限长梁计算模型

Fig.6 Calculating model of semi-infinite length beam with cantilever acted by concentrated moment

根据式(2)和内力的对称性,可知:

$$\begin{cases} Q_A = -\frac{M(\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha} \cdot F_6(L) \\ M_A = -\frac{M}{2} \cdot F_7(L) \end{cases} \quad (11)$$

无限长梁在假想剪力 Q_{OA} 加载下,根据式(2)可知,在 A 点产生的剪力为 $-\frac{Q_{OA}}{2}$ 、弯矩为 $\frac{Q_{OA}}{4\alpha}$,假想弯矩 M_{OA} 加载下,在 A 点产生的剪力为 $-\frac{M_{OA}(\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha}$ 、弯矩为 $\frac{M_{OA}}{2}$ 。

由 A 点截面的剪力和弯矩平衡条件有:

$$\begin{cases} -\frac{Q_{OA}}{2} - \frac{M_{OA}(\alpha^2 + \beta^2)}{4\alpha} + Q_A = 0 \\ \frac{Q_{OA}}{4\alpha} + \frac{M_{OA}}{2} + M_A = 0 \end{cases} \quad (12)$$

解得:

$$\begin{cases} Q_{OA} = -\frac{M2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{3\alpha^2 - \beta^2} [F_6(L) + F_7(L)] \\ M_{OA} = \frac{M}{3\alpha^2 - \beta^2} [(\alpha^2 + \beta^2) \cdot F_6(L) + 4\alpha^2 \cdot F_7(L)] \end{cases} \quad (13)$$

带悬挑长度为 L 的半无限长梁 O 点的挠度为无限长梁 O 点集中力偶 M 、 A 截面剪力 Q_{OA} 、弯矩 M_{OA} 共同作用下在 O 点产生的挠度。3 种荷载作用下的挠度可利用式(2)、式(3)进行计算,经推导为:

$$w = \frac{M}{4D\alpha\beta} \cdot F_2(0) + \frac{\alpha Q_{OA}}{4K} \cdot F_1(L) + \frac{M_{OA}}{4D\alpha\beta} \cdot F_2(L) = -\frac{M\lambda^2}{2K} \cdot \varphi(\lambda, \alpha, \beta, L) \quad (14)$$

式中:

$$\varphi(\lambda, \alpha, \beta, L) = \frac{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{2\alpha\beta\lambda^2(3\alpha^2 - \beta^2)} \cdot \left\{ \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} [F_6(L) + F_6(L)] \cdot F_1(L) - \left[4F_7(L) + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} F_6(L) \right] F_2(L) \right\}$$

当 ψ 取 1.0、0.9、0.7、0.5、0.3、0.1、0.05、0.01、0.001 时,悬挑系数 φ 随计算参数 λL 的变化如下图 7 所示。

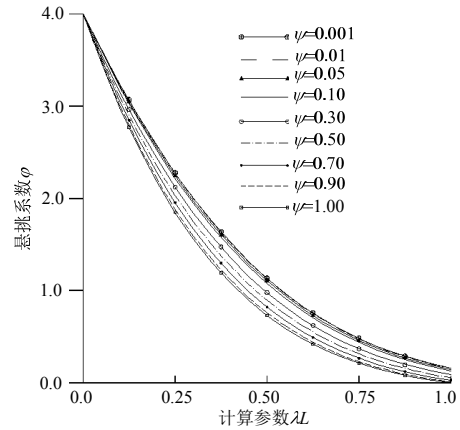


图 7 悬挑系数随计算参数 λL 的变化

Fig.7 Cantilevering coefficient changing with calculating parameter λL

从图 7 可知,对于相同的悬挑长度(相对于计算参数 λL),悬挑系数 φ 随 ψ 的变化很小,因此截面剪切变形对力偶作用下的半无限长梁的悬挑系数影响小,如当 $\lambda L = 0$ 时,无论 ψ 取何值,悬挑系数 $\varphi = 4$ 。当基础梁截面的抗剪刚度 $C \rightarrow \infty$ 时,式(13)可退化成不考虑截面剪切变形影响的 Euler 梁理论结果。

4 十字交叉条形基础的节点荷载分配计算公式

十字交叉条形基础的节点荷载分配计算时,常规做法是将节点分为内柱节点、边柱节点和角柱节点,然后根据节点的静力平衡条件、位移协调条件导出节点荷载分配的计算公式。本文采用静力平衡条件、位移协调条件的相同方法建立节点荷载分配的计算公式。由于本文推导出带悬挑的半无限长梁统一的悬挑系数,因此对节点不再进行分类。考虑到节点不但有竖向集中荷载,也有力偶作用,力偶作用于条形基础梁时会产生变形,在位移协调条件中考虑力偶的影响会影响竖向荷载的分配。

设节点 i 作用有集中荷载 P_i 、力偶 M_{ix} 、 M_{iy} ,

假定节点 i 处 x 方向的地基梁集中荷载的悬挑系数 φ_{ixP} 、集中力偶的悬挑系数 φ_{ixM} 、基床刚度 K_x 、特征系数 λ_x ， y 方向的相应参数分别为 φ_{iyP} 、 φ_{iyP} 、 K_y 、 λ_y 。则节点 i 在集中荷载 P_i 、力偶 M_{ix} 、 M_{iy} 共同作用下，其静力平衡条件、变形协调条件为：

$$\begin{cases} P_i = P_{ix} + P_{iy} \\ w_x = w_y = w \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} P_{ix} = \frac{K_x \lambda_y \varphi_{iyP}}{K_x \lambda_y \varphi_{iyP} + K_y \lambda_x \varphi_{ixP}} \cdot P_i + \frac{K_y \lambda_x^2 \varphi_{ixM}}{K_x \lambda_y \varphi_{iyP} + K_y \lambda_x \varphi_{ixP}} \cdot M_{ix} - \frac{K_x \lambda_y^2 \varphi_{iyM}}{K_x \lambda_y \varphi_{iyP} + K_y \lambda_x \varphi_{ixP}} \cdot M_{iy} \\ P_{iy} = \frac{K_y \lambda_x \varphi_{ixP}}{K_x \lambda_y \varphi_{iyP} + K_y \lambda_x \varphi_{ixP}} \cdot P_i + \frac{K_x \lambda_y^2 \varphi_{iyM}}{K_x \lambda_y \varphi_{iyP} + K_y \lambda_x \varphi_{ixP}} \cdot M_{iy} - \frac{K_y \lambda_x^2 \varphi_{ixM}}{K_x \lambda_y \varphi_{iyP} + K_y \lambda_x \varphi_{ixP}} \cdot M_{ix} \end{cases} \quad (17)$$

根据悬挑系数的定义式(9)、式(13)，则 x 、 y 方向的变形分别为：

$$\begin{cases} w_x = \frac{\lambda_x P_{ix}}{2K_x} \varphi_{ixP} - \frac{\lambda_x^2 M_{ix}}{2K_x} \varphi_{ixM} \\ w_y = \frac{\lambda_y P_{iy}}{2K_y} \varphi_{iyP} - \frac{\lambda_y^2 M_{iy}}{2K_y} \varphi_{iyM} \end{cases} \quad (16)$$

解得：

5 条形基础梁截面的剪切修正系数

利用 Winkler 地基^[13]Timoshenko 梁理论计算十字交叉条形基础的节点荷载分配时，条形基础截面的剪切修正系数 μ 的计算是 Timoshenko 理论的基本问题，目前有多种计算理论和方法，如 Timoshenko 方法^[12]、材料力学方法^[12]、梯形分块算法^[14]、Cowper 方法^[12]、Stephen-Hutchinson 方法^[15-17]、有限元方法、弹性力学方法等。条形基础经常采用矩形截面和凸形截面，矩形截面的剪切修正系数为 $5/6$ ，凸形截面的剪切修正系数见文献[12]。

至于其他截面形式，可采用梯形分块算法^[12]或 ANSYS、SAP 等之类大型通用软件的截面几何特性计算功能。

6 算例

某框架结构基础平面如图 8 所示。节点作用的集中力 $P_1=2400 \text{ kN}$ ， $P_2=3200 \text{ kN}$ ， $P_3=4000 \text{ kN}$ ， $P_4=4500 \text{ kN}$ ；力偶 $M_{1x}=18 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 、 $M_{1y}=463.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 、 $M_{2x}=30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 、 $M_{2y}=88.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 、 $M_{3x}=583.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 、 $M_{3y}=12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 、 $M_{4x}=95.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 、 $M_{4y}=28 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。地基基床系数 $k=5 \times 10^4 \text{ kN/m}^3$ ，基础梁的混凝土弹性模量 $E=2.55 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ， x 方向地基梁宽度、惯性矩和悬挑长度分别为 3.0 m 、 0.127 m^4 、 1.5 m ； y 方向地基梁宽度、惯性矩和悬挑长度分别为 2.0 m 、 0.11 m^4 、 1.8 m 。

采用梯形分块计算，得到 x 方向十字交叉条形基础梁截面剪切修正系数为 0.6283 、 y 方向条形基础梁截面剪切修正系数为 0.7069 。分别用 3 种方法进行计算：方法 A 为本文所建立的考虑十字交叉条形基础梁截面剪切变形影响和节点力偶影响的节

点荷载分配计算方法式(16)；方法 B 为不考虑十字交叉条形基础梁截面剪切变形影响但考虑节点力偶影响的计算方法(在式(16)中令梁的抗剪刚度 $C \rightarrow \infty$)；方法 C 为不考虑节点力偶影响但考虑地基梁截面剪切变形影响的计算方法(在式(16)中令集中力偶为 0)；方法 D 为既不考虑节点集中力偶影响也不考虑地基梁截面剪切变形影响的计算方法^[4]。4 种方法所得的计算结果对比如表 1 所示。

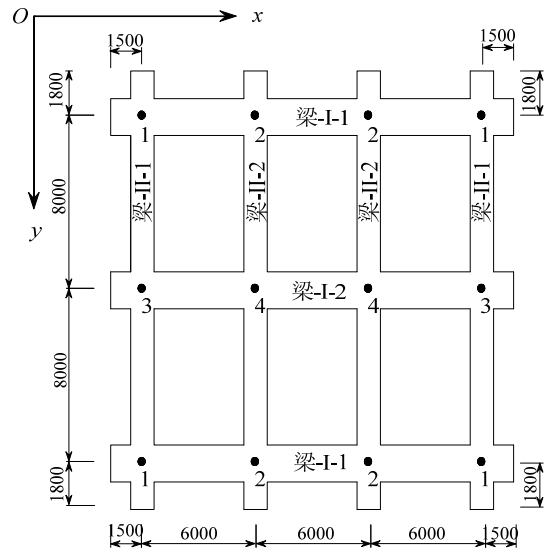


图 8 十字交叉条形基础的平面布置 /mm
Fig.8 Planar arrangement of cross foundation beam

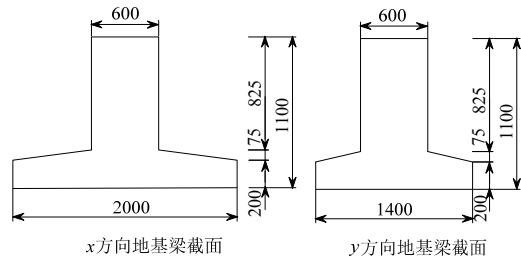


图 9 十字交叉条形基础梁截面尺寸 /mm
Fig.9 Sectional dimension of cross foundation beam

表 1 不同方法计算的节点分配荷载对比表 /kN
Table 1 Comparing of nodal load distribution of different methods

计算方法	分配方向	节点			
		1	2	3	4
计算方法 A	P_x	1279.40	2120.80	1871.30	2560.19
	P_y	1120.60	1079.20	2128.70	1939.81
计算方法 B	P_x	1279.54	2144.78	1848.35	2569.19
	P_y	1120.46	1055.22	2151.65	1930.81
计算方法 C	P_x	1326.77	2132.11	1798.67	2560.02
	P_y	1073.23	1067.89	2201.33	1939.98
计算方法 D	P_x	1301.59	2176.17	1758.99	2627.63
文献[4]方法	P_y	1098.41	1023.83	2241.01	1872.37

从表 1 可以看出, 虽然节点处作用的集中力偶不大, 但其可以改变竖向荷载在节点处的分配。如节点 3 中, 考虑截面剪切变形和力偶影响的计算方法 A 计算的 $P_x=1871.30$ kN、不考虑力偶影响的计算方法 C 计算的 $P_x=1798.67$ kN, 两者相差 4.04%; 节点 1 中, 计算方法 A 计算的 $P_y=1120.60$ kN、计算方法 C 计算的 $P_y=1073.23$ kN, 两者相差 4.41%。同样截面剪切变形也影响节点的荷载分配, 考虑截面剪切变形影响后, 节点处在 x 、 y 两方向的分配更均匀。以竖向受力最大的 4 节点为例, 考虑截面剪切变形影响的计算方法 C 计算的 $P_x=2560.02$ kN、不考虑截面剪切变形影响的计算方法 D 计算的 $P_x=2627.63$ kN, 两者相差 2.57%。

剪切变形能改变节点力的分配, 究其原因主要是相比于 Euler 梁理论, Timoshenko 梁理论考虑剪切变形的影响, 可克服 Euler 梁理论计算挠度偏小的不足。十字交叉条形基础节点力分配计算时, 要应用挠度协调条件, 是一个对挠度比较敏感的问题, 因此应用 Timoshenko 梁理论更合适, 也能使计算得到的结构受力更均匀。

7 结论

综上所述, 可以得到如下结论:

(1) Timoshenko 梁理论考虑了剪切变形的影响, 可克服 Euler 梁理论计算挠度偏小的不足; 其剪切应力与剪切应变的本构关系在平均意义上得到满足, 因此比 Euler 梁理论更完备、适应性更广。十字交叉条形基础节点力分配计算时, 要应用挠度协调条件, 是一个对挠度比较敏感的问题, 此时应用 Timoshenko 梁理论更合适, 也能使计算得到的结构受力更均匀。

(2) 基于 Winkler 地基 Timoshenko 梁理论推导

出十字交叉条形地基集中力、集中力偶的悬挑系数公式。参数分析表明, 截面剪切变形对集中力的悬挑系数影响大(最大可达 $\sqrt{2}$ 倍), 对集中力偶的悬挑系数影响小。节点较密、截面尺寸较大的十字交叉条形基础, 应该考虑截面的剪切变形影响。当条形基础抗剪刚度趋于无穷大时, 本文所导出的理论公式可退化成不考虑截面剪切变形影响的 Euler 梁理论公式, 因此本文公式具有一定的通用性。

(3) 基于所导出的悬挑系数, 建立了可同时考虑截面剪切变形影响和节点集中力、集中力偶影响的荷载分配计算公式。算例结果表明, 虽然节点处作用的集中力偶较小, 但其可以改变竖向荷载在节点处 x 、 y 两方向上的分配。

(4) 本文应用 Winkler 地基 Timoshenko 梁理论所建立的可同时考虑截面剪切变形影响和节点集中力偶作用的节点荷载分配计算方法, 理论更完善、适应性较广, 丰富了十字交叉条形基础的分析理论和计算方法。

参考文献:

- [1] 程文灏, 颜德姮, 王铁成. 混凝土结构与砌体结构设计 [M]. 第 3 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2004: 176—183.
Cheng Wenxiang, Yan Deda, Wang Tiecheng. Design of concrete structure and masonry structure [M]. 3rd ed. Beijing: China Building Industry Press, 2004: 176—183. (in Chinese)
- [2] 李方圆. 十字交叉基础梁的节点荷载分配问题[J]. 西安建筑科技大学学报, 1998, 30(3): 294—297.
Li Fangyuan. Problems on load distribution for the joint of crossed foundation beams [J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology, 1998, 30(3): 294—297. (in Chinese)
- [3] 朱彦鹏, 王龙, 王秀丽. 带刚域的十字交叉弹性地基梁的内力分析与设计(I)[J]. 建筑科学, 2005, 21(1): 35—40.
Zhu Yanpeng, Wang Long, Wang Xiuli. Analysis and design for grillage foundation with rigid area (I) [J]. Building Science, 2005, 21(1): 35—40. (in Chinese)
- [4] 朱彦鹏, 王龙, 王秀丽. 带刚域的十字交叉弹性地基梁的内力分析与设计(II)[J]. 建筑科学, 2005, 21(2): 1—7.
Zhu Yanpeng, Wang Long, Wang Xiuli. Analysis and design for grillage foundation with rigid area (II) [J]. Building Science, 2005, 21(2): 1—7. (in Chinese)
- [5] 陈沙, 王贻荪. 十字交叉地基梁柱荷载分配工程实用统一算法[J]. 勘察科学技术, 1999(4): 42—46.
Chen Sha, Wang Yisun. Practical unified algorithm in construction for distribution of column load on crossed foundation beam [J]. Site investigation Science and

- Technology, 1999(4): 42—46. (in Chinese)
- [6] 邱畅, 王贻菽. 双参数地基上十字交叉梁工程实用算法[J]. 建筑结构, 2001, 31(10): 9—12.
Qiu Chang, Wang Yisun. Practical algorithm of crossed foundation on two-parameter foundation [J]. Building Science, 2001, 31(10): 9—12. (in Chinese)
- [7] 秦植海, 李根生, 张维圉. 柱下钢筋混凝土十字交叉基础节点力的分配[J]. 力学与实践, 1999, 21(5): 22—24.
Qin Zhihai, Li Gensheng, Zhang Weiquan. Load distribution at nodal point of reinforced concrete crossed foundation under column [J]. Mechanics in Engineering, 1999, 21(5): 22—24. (in Chinese)
- [8] He Chunbao, Cai Jian. Grillage beams on elastic foundation analyzed by a semi-analytical and semi-numerical method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(6): 761—766. (in Chinese)
- [9] 刘开国. 十字交叉弹性地基梁与空间高层框架相互作用的分析[J]. 建筑结构学报, 1984, 5(4): 71—79.
Liu Kaiguo. Analysis of interaction between crossed foundation and spatial high-rising frames [J]. Journal of Building Structures, 1984, 5(4): 71—79. (in Chinese)
- [10] 李丛林, 赵建昌. 空间高层框框架—十字交叉基础梁与桩土相互作用分析[J]. 兰州铁道学院学报, 1991, 10(2): 49—59.
Li Conglin, Zhao Jianchang. Analysis of interaction between space multistory frame grillage foundation with piles and soil [J]. Journal of Lanzhou Railway College, 1991, 10(2): 49—59. (in Chinese)
- [11] 孙建琴, 李从林, 刘勇. 弹性地基上十字交叉梁考虑上部结构影响分析的超元法[J]. 土木工程学报, 2004, 37(2): 28—32.
Sun Jianqin, Li Conglin, Liu Yong. Super element method for analyzing grillage beams on elastic foundation considering influence of upper structures [J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(2): 28—32. (in Chinese)
- [12] 夏桂云, 李传习. 考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008: 92—136.
Xia Guiyun, Li Chuanxi. Frame structure theory including shear deformation effect and its applications [M]. Beijing: China Communications Press, 2008: 92—136. (in Chinese)
- [13] 丁敏, 李潇, 马倩. 基于 Winkler 弹性地基梁模型的半刚性轻钢柱脚底板受力分析[J]. 工程力学, 2014, 31(5): 158—165.
Ding Min, Li Xiao, Ma Qian. Mechanics analysis of the sole plate of semi-rigid light steel column footings based on Winkler model of elastic foundation beams [J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(5): 158—165. (in Chinese)
- [14] 夏桂云, 李传习, 曾庆元. Winkler 地基上 Timoshenko 深梁的有限元分析[J]. 中南大学学报, 2010, 41(4): 1549—1555.
Xia Guiyun, Li Chuanxi, Zeng Qingyuan. Finite element formulation of Timoshenko beam on Winkler foundation [J]. Journal of Central South University, 2010, 41(4): 1549—1555. (in Chinese)
- [15] Hutchinson J R. Shear coefficients for Timoshenko beam theory [J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 2001, 68(1): 87—92.
- [16] Stephen N G. Discussion “shear coefficients for Timoshenko beam theory” [J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 2001, 68(11): 959—961.
- [17] Hutchinson J R. On Timoshenko beams of Rectangular cross-section [J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 2004, 71(5): 359—367.