

文章编号: 1000-4750(2016)02-0011-07

基于双三次曲面片的三维接触面光滑方法

姜玉曦, 周海兵, 熊俊, 刘文韬

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

摘 要: 该文提出了一种基于双三次曲面片的适用于结构和非结构网格的三维接触面光滑方法。此光滑方法中, 仅仅依靠网格节点坐标和法向定义了双三次曲面片, 并由此构造出曲面片之间切平面连续, 曲面片内 C^1 连续的三维光滑接触面。在构造的光滑接触面上, 设计了接触搜索方法用以确定接触发生的位置, 并且依据罚函数接触算法, 计算节点的穿透深度和接触作用力。算例结果显示光滑接触面确保了滑动节点的接触力的连续变化, 提高了计算的收敛性。

关键词: 接触算法; 界面光滑; 双三次参数曲面片; 罚函数方法; 拉氏数值模拟

中图分类号: O343.3 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.07.0571

A 3D CONTACT SMOOTHING METHOD BASED ON BI-CUBIC PARAMETRIC PATCHES

JIANG Yu-xi, ZHOU Hai-bing, XIONG Jun, LIU Wen-tao

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

Abstract: A new strategy for the smooth representation of three-dimensional contact surfaces is developed. This method can be applied to both regular and irregular meshes. In this method, the contact surfaces are modeled using bi-cubic parametric patches. These patches are defined only by using the coordinates and the normal vectors of the mesh nodes. The resulting surfaces are tangent plane continuous between adjacent patches and C^1 continuous in the patches. A contact search algorithm is designed on the smooth contact surfaces to determine the contact points. Then the gaps and the contact forces are calculated using the penalty algorithm. The numerical examples demonstrate that the smooth contact surface ensures that the contact forces of the sliding nodes vary smoothly and provides an improvement in convergence behavior.

Key words: contact algorithm; surface smoothing; bi-cubic parametric patches; penalty method; Lagrangian numerical simulation

拉氏方法或者采用重分重映技术的拉氏方法具有描述物质界面运动先天优势。在拉氏方法中, 接触算法对相互接触的物质运动界面施加约束以保证接触界面的正确模拟, 是拉氏方法中最重要的部分之一。由于接触问题的非线性, 接触算法成为拉氏方法中最难的部分之一。其中一个非线性的主要来源就是接触面的几何非线性。在通常的计算

中, 接触面由离散的网格单元表面组成, 是一个法向不连续的非光滑曲面。在界面发生大变形情况下, 当节点在单元面之间滑移或者是滑出边界时, 节点接触位置的法向发生跳跃, 使得施加给节点的接触约束力的方向发生跳跃。这种非物理跳跃会带来应力错误和边界节点的振动, 甚至导致计算发散。

收稿日期: 2014-07-02; 修改日期: 2015-04-07

基金项目: 中国工程物理研究院科学技术发展基金项目(2012B0201028, 2012B0201027, 2012A0201011, 2013A0101004, 2013A0201009)

通讯作者: 姜玉曦(1975-), 男, 江西上饶人, 副研究员, 博士, 从事计算流体力学和接触力学研究(E-mail: jiang_yuxi@iapcm.ac.cn).

作者简介: 周海兵(1975-), 男, 山东人, 研究员, 博士, 从事湍流及三维拉氏程序研究(E-mail: zhou_haibing@iapam.ac.cn);

熊俊(1975-), 男, 湖北人, 研究员, 博士, 从事流体力学及三维拉氏程序研究(E-mail: xiong_jun@iapcm.ac.cn);

刘文韬(1973-), 女, 黑龙江人, 研究员, 博士, 从事冲击动力学研究(E-mail: liu_wentao@iapam.ac.cn).

为了补救接触界面的几何非线性对接触计算带来的缺陷,许多学者引入了接触界面光滑方法。在二维下基于样条插值的光滑方法被用来构造光滑的接触滑移线,如三次 Hermit 插值^[1]、三次 Bezier 插值^[2]、Overhauser 插值^[3-4]或 NURBS 插值方法^[5]等。三维接触面的光滑方法比二维的光滑方法要困难得多。被用于构造三维光滑接触面的插值方法有四次 Bezier 曲面片插值方法^[6],基于边界曲线的曲面片插值方法^[7],基于 Gregory 曲面片的插值方法^[8],三维接触面光滑细分格式^[9],以 NURBS 插值为基础的等参几何分析方法^[10-12],基于 Nagata 曲面片的插值方法^[13]等。由于三维接触面的空间复杂性,近年来兴起了网格无关的接触面光滑方法,如光滑距离函数方法^[14],径向点插值方法^[15]等。

以上提出的三维接触面光滑方法中,或者只适用于三角形单元面或规则网格,或者大大增加了计算量。因此,一个可以应用于结构和非结构网格的,计算简单的三维接触面光滑方法,仍是一个值得研究的问题。实际上,接触问题的计算只需要接触面满足切平面连续的 G^1 光滑性就可以避免接触力的“跳跃”^[8]。

本文提出了一种三维接触面光滑算法,仅仅依靠网格节点坐标和法向等当地信息,构造出单元面边界 G^1 连续,其余地方 C^1 连续的三维光滑接触面。在此光滑接触面上,设计了接触搜索方法,然后计算接触点的坐标以及节点对接触面的穿透深度,依据罚函数方法计算接触力,从而求解接触问题。

1 基于双三次插值的接触面光滑方法

1.1 曲面的表示

通常用于描述连续体表面的参数曲面单元片如图 1 所示,可以表示为:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{c}_{i,j} \xi^i (1-\xi)^{3-i} \eta^j (1-\eta)^{3-j} \quad (1)$$

其中: ξ 和 η 是曲面片内任一点的参数坐标,其范围是 0~1; $\mathbf{c}_{i,j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3$) 是该曲面的系数向量,表示成矩阵如下:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{00} & \mathbf{c}_{01} & \mathbf{c}_{02} & \mathbf{c}_{03} \\ \mathbf{c}_{10} & \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \mathbf{c}_{13} \\ \mathbf{c}_{20} & \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22} & \mathbf{c}_{23} \\ \mathbf{c}_{30} & \mathbf{c}_{31} & \mathbf{c}_{32} & \mathbf{c}_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

只要给定矩阵 \mathbf{C} 不同的值,式(1)便可以生成不同类型的曲面片,如 Bezier 曲面、B 样条曲面和

Coons 曲面等。

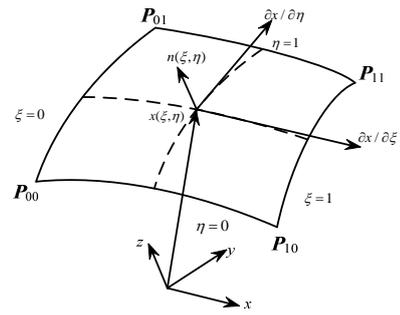


图 1 参数化曲面片

Fig.1 Parametric surface patch

1.2 曲面边界曲线的系数确定

对式(1)取 $\xi = 0$, 得到一条曲面边界的曲线:

$$\mathbf{x}(0, \eta) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{c}_{0,j} \eta^j (1-\eta)^{3-j} \quad (3)$$

令 $\eta = 0$ 和 $\eta = 1$, 得到:

$$\mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{P}_{00} = \mathbf{c}_{0,0}, \quad \mathbf{x}(0, 1) = \mathbf{P}_{01} = \mathbf{c}_{0,3} \quad (4)$$

系数 \mathbf{c}_{00} 和 \mathbf{c}_{03} 分别为曲面边界的两个顶点坐标。

对式(1)取 $\xi = 1$, 可以得到系数 \mathbf{c}_{30} 和 \mathbf{c}_{33} 分别为曲面片的另外两个顶点坐标 \mathbf{P}_{10} 和 \mathbf{P}_{11} 。

假定与顶点 \mathbf{P}_{00} 共有 n 个相连的单元面,如图 2 所示,第 i 个单元面中与顶点 \mathbf{P}_{00} 相连的边向量分别为 \mathbf{C}_i 和 \mathbf{C}_{i+1} , 第 i 个单元面的面积为 A_i , \mathbf{P}_{00} 在此单元面内的法向为 \mathbf{n}_i :

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{C}_i \times \mathbf{C}_{i+1} / |\mathbf{C}_i \times \mathbf{C}_{i+1}| \quad (5)$$

定义顶点 \mathbf{P}_{00} 的法向 \mathbf{n}_{00} 等于其在周围相连的各个单元面内法向的面积加权:

$$\mathbf{n}_{00} = \sum_{i=1}^n A_i \mathbf{n}_i / \sum_{i=1}^n A_i \quad (6)$$

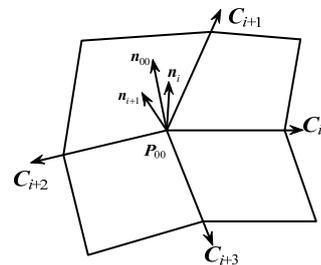


图 2 顶点法向的定义

Fig.2 The definition of the vertex normal vector

根据法向 \mathbf{n}_{00} , 可以确定 \mathbf{P}_{00} 处的切平面。如图 3 所示,将式(3)描述的边界曲线沿法向 \mathbf{n}_{00} 投影在此切平面内,即可得到此曲线在顶点 \mathbf{P}_{00} 处的切向:

$$\mathbf{t}_{00} = \frac{(\mathbf{P}_{01} - \mathbf{P}_{00}) - ((\mathbf{P}_{01} - \mathbf{P}_{00}) \cdot \mathbf{n}_{00}) \mathbf{n}_{00}}{|(\mathbf{P}_{01} - \mathbf{P}_{00}) - ((\mathbf{P}_{01} - \mathbf{P}_{00}) \cdot \mathbf{n}_{00}) \mathbf{n}_{00}|} \quad (7)$$

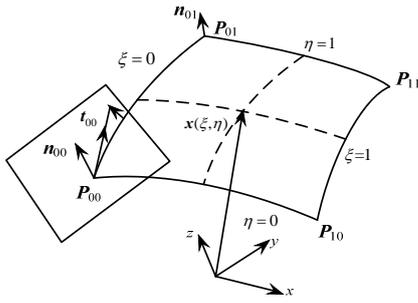


图 3 边界曲线在顶点 P_{00} 的切平面内的投影

Fig.3 The projection of the boundary curve on the tangent plane of the vertex P_{00}

式(3)对 η 求导, 然后取 $\eta = 0$:

$$(\partial \mathbf{x} / \partial \eta) \Big|_{\eta=0} = -3\mathbf{c}_{0,0} + \mathbf{c}_{0,1} \quad (8)$$

为了求解系数 \mathbf{c}_{01} , 需要知道 $(\partial \mathbf{x} / \partial \eta) \Big|_{\eta=0}$, 而 $(\partial \mathbf{x} / \partial \eta) \Big|_{\eta=0}$ 的方向与切向 \mathbf{t}_{00} 相同, 可以令:

$$(\partial \mathbf{x} / \partial \eta) \Big|_{\eta=0} = w_{00} \cdot \mathbf{t}_{00} \quad (9)$$

其中, w_{00} 是权值, 可以是任意实数, 通过调整权值可以改变曲线的形状。为了简单起见, 可令权值等于 1。所以有:

$$\mathbf{c}_{01} = 3\mathbf{c}_{00} + \mathbf{t}_{00} = 3\mathbf{P}_{00} + \mathbf{t}_{00} \quad (10)$$

同样的处理可以得到:

$$\mathbf{c}_{02} = 3\mathbf{c}_{03} - \mathbf{t}_{01} = 3\mathbf{P}_{01} - \mathbf{t}_{01} \quad (11)$$

采用相同的方法, 依次对曲面片的其余三条边界曲线进行计算, 可以得到各边上的系数 \mathbf{c}_{10} 、 \mathbf{c}_{20} 、 \mathbf{c}_{13} 、 \mathbf{c}_{23} 、 \mathbf{c}_{31} 、 \mathbf{c}_{32} 。

1.3 曲面内部系数的确定

至此, 在曲面函数式(1)的 16 个系数中, 还剩 4 个 (\mathbf{c}_{11} , \mathbf{c}_{12} , \mathbf{c}_{21} , \mathbf{c}_{22}) 是待定的。为了求得这 4 个系数, 对式(1)取交叉导数:

$$(\partial^2 \mathbf{x} / \partial \xi \partial \eta) \Big|_{\xi=0, \eta=0} = \mathbf{c}_{11} + 9\mathbf{c}_{00} - 3(\mathbf{c}_{10} + \mathbf{c}_{01}) \quad (12)$$

$$(\partial^2 \mathbf{x} / \partial \xi \partial \eta) \Big|_{\xi=0, \eta=1} = -\mathbf{c}_{12} - 9\mathbf{c}_{03} + 3(\mathbf{c}_{13} + \mathbf{c}_{02}) \quad (13)$$

$$(\partial^2 \mathbf{x} / \partial \xi \partial \eta) \Big|_{\xi=1, \eta=0} = -\mathbf{c}_{21} - 9\mathbf{c}_{30} + 3(\mathbf{c}_{20} + \mathbf{c}_{31}) \quad (14)$$

$$(\partial^2 \mathbf{x} / \partial \xi \partial \eta) \Big|_{\xi=1, \eta=1} = \mathbf{c}_{22} + 9\mathbf{c}_{33} - 3(\mathbf{c}_{23} + \mathbf{c}_{32}) \quad (15)$$

上述交叉偏导数, 就是计算几何中的扭矢 (twist vector), 通常可令扭矢为 0, 即可以使得共点的曲面片在顶点处的法向连续, 又可以使得计算简单。这样, 式(12)~式(15)可得出 \mathbf{c}_{11} , \mathbf{c}_{12} , \mathbf{c}_{21} 和 \mathbf{c}_{22} :

$$\mathbf{c}_{11} = 3(\mathbf{c}_{10} + \mathbf{c}_{01}) - 9\mathbf{c}_{00} = 3(3\mathbf{P}_{00} + \mathbf{t}_{00} + \mathbf{t}_{10}) \quad (16)$$

$$\mathbf{c}_{12} = 3(\mathbf{c}_{13} + \mathbf{c}_{02}) - 9\mathbf{c}_{03} = 3(3\mathbf{P}_{01} + \mathbf{t}_{30} - \mathbf{t}_{01}) \quad (17)$$

$$\mathbf{c}_{21} = 3(\mathbf{c}_{20} + \mathbf{c}_{31}) - 9\mathbf{c}_{30} = 3(3\mathbf{P}_{10} + \mathbf{t}_{20} - \mathbf{t}_{11}) \quad (18)$$

$$\mathbf{c}_{22} = 3(\mathbf{c}_{23} + \mathbf{c}_{32}) - 9\mathbf{c}_{33} = 3(3\mathbf{P}_{11} - \mathbf{t}_{21} - \mathbf{t}_{31}) \quad (19)$$

最终系数矩阵 \mathbf{C} 可以写成:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & 3\mathbf{P}_{00} + \mathbf{t}_{00} \\ 3\mathbf{P}_{00} + \mathbf{t}_{10} & 3(3\mathbf{P}_{00} + \mathbf{t}_{00} + \mathbf{t}_{10}) \\ 3\mathbf{P}_{10} - \mathbf{t}_{11} & 3(3\mathbf{P}_{10} + \mathbf{t}_{20} - \mathbf{t}_{11}) \\ \mathbf{P}_{10} & 3\mathbf{P}_{10} + \mathbf{t}_{20} \\ 3\mathbf{P}_{01} - \mathbf{t}_{01} & \mathbf{P}_{01} \\ 3(3\mathbf{P}_{01} + \mathbf{t}_{30} - \mathbf{t}_{01}) & 3\mathbf{P}_{01} + \mathbf{t}_{30} \\ 3(3\mathbf{P}_{11} - \mathbf{t}_{21} - \mathbf{t}_{31}) & 3\mathbf{P}_{11} - \mathbf{t}_{31} \\ 3\mathbf{P}_{11} - \mathbf{t}_{21} & \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix} \quad (20)$$

1.4 讨论

如果已知曲面片内任意一点的参数坐标 (ξ, η) , 此点的坐标 \mathbf{x} 可以由式(1)和相应的系数矩阵式(20)计算。

而 (ξ, η) 点的法向由下列式子计算:

$$\mathbf{n}(\xi, \eta) = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|} \quad (21)$$

由式(1)和系数矩阵式(20), 可以得到在 $\xi = 0$ 边界曲线上的导数值:

$$(\partial \mathbf{x} / \partial \xi) \Big|_{\xi=0} = \sum_{j=0}^3 \eta^j (1-\eta)^{3-j} [-3\mathbf{c}_{0j} + \mathbf{c}_{1j}] \quad (22)$$

$$(\partial \mathbf{x} / \partial \eta) \Big|_{\xi=0} = -3(1-\eta)^2 \mathbf{c}_{00} +$$

$$(1-4\eta + \eta^2) \mathbf{c}_{01} + (2\eta - 3\eta^2) \mathbf{c}_{02} + 3\eta^2 \mathbf{c}_{03} \quad (23)$$

$\partial \mathbf{x} / \partial \xi$ 和 $\partial \mathbf{x} / \partial \eta$ 在 $\xi = 0$ 边界曲线上只与系数 \mathbf{c}_{00} 、 \mathbf{c}_{01} 、 \mathbf{c}_{02} 、 \mathbf{c}_{03} 有关。这些系数又仅仅依据曲线的顶点坐标和法向确定, 可见在曲线 $\xi = 0$ 上由式(21)确定的法向是唯一的。由于曲面片方程的对称性, 在其余的边界上, 也有相同的结果。由此证明曲面片之间是法向连续的。

如果单元面是三角形, 把它看作是有一条长度为 0 的曲线边的四边形来处理, 假设一条曲线的两个顶点重合, 例如 $\mathbf{P}_{00} = \mathbf{P}_{01} = \mathbf{P}$, 则有:

$$\mathbf{c}_{00} = \mathbf{c}_{03} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{c}_{01} = \mathbf{c}_{02} = 3\mathbf{P} \quad (24)$$

同理可以得到其他系数的值。由此可见, 此方法可以应用于非结构网格中。

2 接触问题的描述与接触算法

2.1 接触问题的描述

考虑两个物体 B_α , $\alpha = 1, 2$, 占据空间 $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$, 经过运动后发生接触, 运动的过程分别可以视为两个映射 $\varphi_\alpha: \varphi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) = \mathbf{x}_\alpha$ 。则存在两个

初始坐标为 \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 的分别位于 B_1 和 B_2 边界上的点, 经过 φ_α 的映射成为同一个点, 即 $\varphi_1(\mathbf{X}_1, t) = \varphi_2(\mathbf{X}_2, t) = \mathbf{x}$ 。

在接触界面上必须满足法向的不可穿透条件和法向应力连续条件。

对于 B_2 的边界上每个点 \mathbf{x}_2 , 在 B_1 上都有一个与之距离最近的点 \mathbf{x}_1 , 法向不可穿透条件表述为:

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \geq 0 \quad (25)$$

其中, \mathbf{n}_1 是点 \mathbf{x}_1 的法向。

可以定义一个距离函数(gap function)表述法向不可穿透条件的不等式:

$$g_N = \begin{cases} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n}_1, & \text{当 } (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \geq 0 \\ 0, & \text{当 } (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n}_1 < 0 \end{cases} \quad (26)$$

法向应力连续条件表述为:

$$P_N^1 + P_N^2 = 0 \quad (27)$$

在法向上, 不考虑在接触界面之间的任何粘性, 所以法向应力 P_N 不能是拉力, 必须满足:

$$\begin{cases} P_N < 0, & \text{当 } g_N = 0 \\ P_N = 0, & \text{当 } g_N > 0 \end{cases} \quad (28)$$

因此接触约束条件可以统一写成:

$$p_N \cdot g_N = 0 \quad (29)$$

拉氏框架下的控制方程表示如下:

$$d\rho/dt + \rho \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (30)$$

$$\rho d\dot{\mathbf{u}}/dt = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (31)$$

$$\rho de/dt = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \dot{\mathbf{u}} \quad (32)$$

其中: ρ 是密度; $\dot{\mathbf{u}}$ 是速度; e 是内能; $\boldsymbol{\sigma}$ 是应力张量; 另外还需要补充连续介质的本构关系和状态方程。

需要满足的边界条件有:

$$\text{位移边界条件: } \mathbf{u}_\alpha = \bar{\mathbf{u}}_\alpha \quad (33)$$

$$\text{应力边界条件: } \boldsymbol{\sigma}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \quad (34)$$

$$\text{位移初始条件: } \mathbf{u}_\alpha|_{t=0} = \mathbf{u}_{0,\alpha} \quad (35)$$

$$\text{速度初始条件: } \dot{\mathbf{u}}_\alpha|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_{0,\alpha} \quad (36)$$

$$\text{接触条件: } P_N \cdot g_N = 0 \quad (37)$$

其中式(37)的接触边界条件, 描述了运动边界的相互作用, 需要接触算法进行计算。由于接触区域是事先不可知的, 所以接触算法的第一步就是接触搜索, 以确定接触发生的地点。在确定发生接触的区域后, 应用接触算法计算接触作用力, 并将接触作用力反馈到动量方程的计算中。

2.2 三维光滑接触面上的接触搜索

通常将节点在相对接触面上的投影点作为它

的接触位置。整个接触搜索过程可以分为两个步骤, 首先是在相对界面上的节点中, 寻找给定节点的最近点, 然后在最近点周围相连的单元面中, 确定节点投影的位置。

搜索节点的最近点的过程, 称为“全局搜索”, 它是一个相对独立的过程, 在本文中采用的是桶搜索(Bucket Search)^[16]算法, 可以比较高效地寻找到节点的最近点。

确定节点投影单元面的过程, 称为“局部搜索”。在本文中, 首先采用“Inside-Outside”方法^[17]来初步判定节点可能投影在那个单元面内。

设节点 A 的最近点 a 相连的其中一个单元面如图 4 所示, 定义沿着单元面的外法线方向逆时针旋转, 在旋转的左手边为“内侧”-Inside, 右手边为“外侧”-Outside。

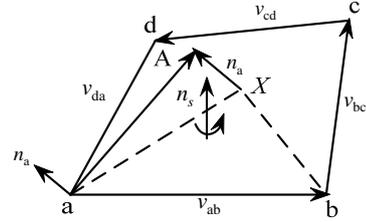


图 4 节点与单元面的投影关系示意图

Fig.4 Schematic of a node projected to a segment

如果节点 A 沿着最近点 a 的法向 \mathbf{n}_a 投影, 满足下列的关系, 则称节点 A 投影在边 ab 的“内侧”:

$$S_n = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{aA} \times \mathbf{v}_{ab}) \cdot \mathbf{n}_a \leq 0 \quad (38)$$

如果对于单元面的所有边, 节点 A 沿着最近点 a 的法向的投影, 都位于此边的“内侧”, 则可以判断为节点 A 投影在此单元面内。

在确定节点 A 投影在其最近点 a 的某个单元面内之后, 需要在此单元面的光滑曲面片上, 寻找节点 A 的投影点。如图 5 所示, 曲面片形心标记为 G, 点 A 在曲面片上的投影点标记为 C, 点 A 到投影点 C 的向量 \mathbf{r}_{AC} 。则在参数化的曲面片上, 投影点 C 处的两个切向与向量 \mathbf{r}_{AC} 正交, 则有以下两个式子的成立:

$$(\partial \mathbf{r} / \partial \xi)_C \cdot \mathbf{r}_{AC} = 0 \quad (39)$$

$$(\partial \mathbf{r} / \partial \eta)_C \cdot \mathbf{r}_{AC} = 0 \quad (40)$$

其中接触点的切向可以通过接触面的表达式(1)和式(20)得到。通过 Newton-Raphson 迭代方法可以求解点 A 在接触片段上的接触点参数坐标 (ξ_C, η_C) 。

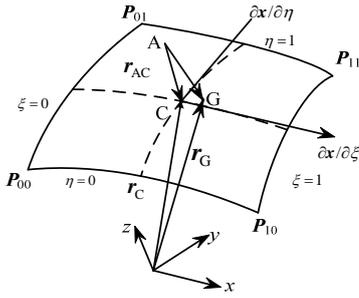


图 5 参数化曲面片上的接触点位置

Fig.5 Location of contact point on parametric surface patch

2.3 罚函数方法

罚函数算法^[18]是接触计算中常用的一种算法。此方法中接触面通常分为主面和从面，之上的节点分别称为主点和从点。经过接触搜索之后，得到从点在主面上的投影点坐标和法向，然后计算从点在主面上的穿透深度：

$$g_n = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \cdot \mathbf{n} \quad (41)$$

其中： g_n 是节点的穿透深度，简称穿深； \mathbf{r}_A 是节点的坐标； \mathbf{r}_C 是投影点坐标； \mathbf{n} 是投影点的法向。

如果节点的穿深 $g_n < 0$ ，则对从点施加的惩罚力为：

$$\mathbf{f}_s = -kg_n \mathbf{n}, \quad k = \alpha KA^2 / V \quad (42)$$

其中： α 是缩放系数，通常取 0.1； K 是体积模量； A 是从点穿透的主面的单元面面积； V 是从点穿透的主面的单元体积； \mathbf{n} 是从点在主面上的投影点的法向。

然后将惩罚力的反向作用力，通过插值方法施加到从点穿透的主面的顶点上。

$$\mathbf{f}_m^i = -\phi_i(\xi_C, \eta_C) \cdot \mathbf{f}_s \quad (43)$$

其中， $\phi_i(\xi_C, \eta_C)$ 是从点的投影点在主面上的插值形函数。

在已知光滑曲面片的几何描述后，可以构造在此曲面片上的光滑的函数分布，并由此得出函数的插值形函数。

设有函数 $S(\xi, \eta)$ ，可以将此函数的分布表示为：

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_{i,j} \xi^i (1-\xi)^{3-i} \eta^j (1-\eta)^{3-j} \quad (44)$$

其中， $b_{i,j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3$) 是该物理量表达的系数。

取 $\xi = 0$ 的边界曲线，分别取 $\eta = 0$ 和 $\eta = 1$ ，可知系数 b_{00} 和 b_{03} 分别为曲线的两个顶点处的函数值。同样地，系数 b_{30} 和 b_{33} 为曲面片的另外两个顶点处的函数值。

$\xi = 0$ 的边界曲线对 η 求导，然后分别取 $\eta = 0$ 和 $\eta = 1$ ，并且令曲线顶点处函数对 η 求导的偏导数等于 0，得到：

$$b_{0,1} = 3b_{0,0} = 3S_{00}, \quad b_{0,2} = 3b_{0,3} = 3S_{01} \quad (45)$$

同样的方法可以处理 $\xi = 1$ 、 $\eta = 0$ 和 $\eta = 1$ 的边界曲线，分别得到 b_{30} 、 b_{31} 、 b_{32} 、 b_{33} 、 b_{10} 、 b_{20} 、 b_{13} 和 b_{23} 。

对式(44)取交叉导数，同时令这些交叉导数在曲面片的顶点处都等于 0，可得出：

$$b_{11} = 9S_{00}, \quad b_{12} = 9S_{01}, \quad b_{21} = 9S_{10}, \quad b_{22} = 9S_{11} \quad (46)$$

于是系数矩阵 \mathbf{B} 可以写成：

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} S_{00} & 3S_{00} & 3S_{01} & S_{01} \\ 3S_{00} & 9S_{00} & 9S_{01} & 3S_{01} \\ 3S_{10} & 9S_{10} & 9S_{11} & 3S_{11} \\ S_{10} & 3S_{10} & 3S_{11} & S_{11} \end{bmatrix} \quad (47)$$

由式(44)和系数矩阵式(47)可知，插值形函数：

$$\phi_1(\xi_C, \eta_C) = (1-\xi)^2 (1-\eta)^2 (1+2\xi)(1+2\eta) \quad (48)$$

$$\phi_2(\xi_C, \eta_C) = \xi^2 \cdot (1-\eta)^2 \cdot (3-2\xi) \cdot (1+2\eta) \quad (49)$$

$$\phi_3(\xi_C, \eta_C) = \xi^2 \cdot \eta^2 \cdot (3-2\xi) \cdot (3-2\eta) \quad (50)$$

$$\phi_4(\xi_C, \eta_C) = (1-\xi)^2 \cdot \eta^2 \cdot (1+2\xi) \cdot (3-2\eta) \quad (51)$$

3 数值算例

3.1 表面光滑的算例

一个球面，采用 24 个网格单元网格进行离散划分，结果如图 6 的左图所示，这样的一个离散单元组成的球面，可见在单元节点和边线上的法向是不连续的。经过式(1)和式(20)表示的曲面片插值方法的光滑后，形成了图 6 的右图所示的法向连续的光滑的球面形状。

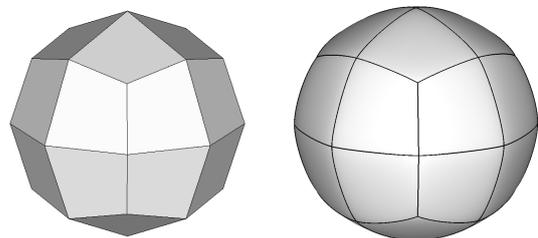


图 6 光滑前和光滑后的球面

Fig.6 The sphere surface before and after smoothing

3.2 双管碰撞算例

双管碰撞算例是接触碰撞问题的经典算例^[19-20]，两管长 46 cm，外径 20 cm，厚 0.6 cm。左管垂直放置，右管水平放置，两管相距 5 cm，以

35 m/s 速度相对运动。双管的材料参数如表 1 所示。管的长度方向网格数为 10, 厚度方向 1 个网格, 管的周向 36 网格。

表 1 双管的材料参数

Table 1 Material parameters of two tubes

弹性模量 E/GPa	塑性模量 E_p/GPa	屈服应力 σ/GPa	泊松比 ν	密度 $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$
25	0.23	0.1	0.3	7640

图 7 显示了 $t=5$ ms 时刻的算例计算结果, 其中左图是双管的单元压力分布图, 压力的单位是 GPa, 右图是双管的形状图。将图 7 与文献[19—20]结果进行比较, 说明三维接触面光滑方法很好地模拟双管的碰撞过程。

表 2 记录了接触面光滑算法与非光滑算法计算双管碰撞算例所耗的时间。在此算例中, 接触碰撞的计算占据整个计算时间耗费的 36% 左右。接触光滑算法增加了接触面的光滑过程、光滑接触面上的投影点的计算过程以及插值过程, 其增加的耗费时间仅仅占整个计算的大约 1% 左右。可见光滑算法能够在增加较少计算量的情况下, 给接触面一个光滑的表达。

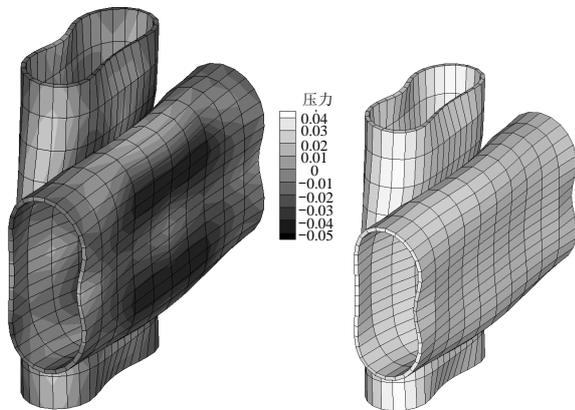


图 7 $t=5$ ms 时刻的双管形状与压力分布

Fig.7 Pressure distribution and configuration of the two tubes at $t=5$ ms

表 2 双管碰撞计算的时间消耗

Table 2 Time consumption for two tubes impact simulation

两种算法	接触计算耗时/s	计算总耗时/s
接触面光滑算法	101.81	280.38
非光滑算法	98.56	277.14

3.3 金属冲压算例

在上方的钨冲压头和下方深 0.2 m 的钨制凹槽之间, 放置一块铝板, 给定冲压头一个 10 m/s 的恒定速度, 对铝板进行冲压。

计算中应用 Gruneisen 状态方程, 设置中间铝板的弹性模量为 $E=3.66 \times 10^{11} \text{N}/\text{m}^2$, 密度为 $\rho=3.96 \times 10^3 \text{kg}/\text{m}^3$, 泊松比为 $\nu=0.22$ 。整个算例共有 12384 个网格单元, 其中中间铝板的网格单元数为 7560。

图 8 为 $t=20$ ms 时刻, 金属冲压算例的最终形状, 其中右图是中间铝板的形状。表 3 则记录了金属冲压算例的模拟过程所耗费的时间。

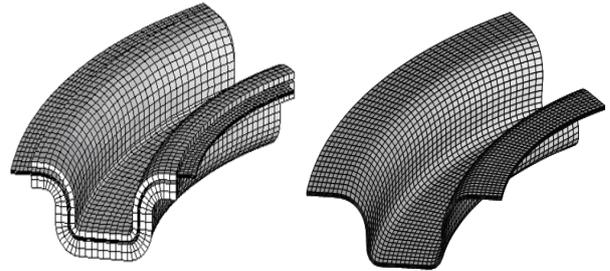


图 8 金属冲压成型算例在 $t=20$ ms 时刻的形状

Fig.8 The configurations of the metal sheet stamping process at $t=20$ ms

表 3 金属冲压计算的时间消耗

Table 3 Time consumption for metal sheet stamping simulation

两种算法	接触计算耗时/s	计算总耗时/s
接触面光滑算法	4346	9568.71
非光滑算法	4198.67	9421.38

在此算例中, 接触碰撞的计算占据整个计算时间耗费的 45% 左右。接触光滑带来的额外时间消耗占整个计算的大约 1.6% 左右。结果显示金属成型的过程被很好的进行了模拟。

4 结论

本文提出了一种三维接触面的光滑方法, 依靠单元面顶点的坐标和法向等当地局部信息, 构造出单元面边界 G^1 连续(切平面连续), 其余地方 C^1 连续的三维光滑接触面。在此构造的光滑接触面上, 设计了接触搜索方法, 并将此光滑接触面应用于罚函数接触算法中。数值算例的结果显示此算法能够在增加较少计算量的情况下, 为实际的接触面提供一个更为准确的几何表达, 光滑接触面的连续法向保证了法向接触力的连续施加, 提高了计算的收敛性。

参考文献:

- [1] Padmanabhan V, Laursen T A. A framework for development of surface smoothing procedures in large

- deformation frictional contact analysis [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2001, 37: 173–198.
- [2] Wriggers P, Krstulovic-Opara L, Korelc J. Smooth C^1 -interpolations for two-dimensional frictional contact problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51: 1469–1495.
- [3] El-Abbasi N, Meguid S A, Czekanski A. On the modeling of smooth contact surfaces using cubic splines [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 953–967.
- [4] Al-Dojayli A, Meguid A A. Accurate modeling of contact using cubic splines [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2002, 38: 337–352.
- [5] Stadler M, Holzapfel G A, Korelc J. C^n continuous modeling of smooth contact surface using NURBS and application to 2D problems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57: 2177–2203.
- [6] Krstulovic-Opara L, Wriggers P, Korelc J. A C^1 -continuous formulation for 3D finite deformation frictional contact [J]. *Computational Mechanics*, 2002, 29: 27–42.
- [7] Wang F, Chen J, Yao Z. FFS contact searching algorithm for dynamic finite element analysis [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52: 655–672.
- [8] Puso M A, Laursen T. A 3D contact smoothing method using Gregory patches [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54: 1161–1194.
- [9] Stadler M, Holzapfel G A. Subdivision schemes for smooth contact surfaces of arbitrary mesh topology in 3D [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60: 1161–1195.
- [10] Lu Jia. Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 726–741.
- [11] Temizer I, Wriggers P, Hughes T J R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 1100–1112.
- [12] Corbett C J, Sauer R A. NURBS-enriched contact finite elements [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, 275: 55–75.
- [13] Neto D M, Oliveira M C, Menezes L F, Alves J L. Applying Nagata patches to smooth discretized surfaces used in 3D frictional contact problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, 271: 296–320.
- [14] Belytschko T, Daniel W J T, Ventura G. A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 55: 101–125.
- [15] Qian X, Yuan H, Zhou M, Zhang B. A general 3D contact smoothing method based on radial point interpolation [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2014, 257: 1–13.
- [16] Benson D J, Hallquist J O. A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, 78: 141–163.
- [17] Wang S P, Nakamachi E. The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40: 3665–3685.
- [18] 刘书, 刘晶波, 方鄂华. 动接触问题及其数值模拟的研究进展[J]. *工程力学*, 1999, 16(6): 14–28.
Liu Shu, Liu Jingbo, Fang Ehua. The advances of studies on the dynamic contact problem and its numerical methods [J]. *Engineering Mechanics*, 1999, 16(6): 14–28. (in Chinese)
- [19] 王福军, 程建钢, 姚振汉, 黄存军, 寇哲军. 结构碰撞数值模拟的一类接触算法[J]. *工程力学*, 2002, 19(1): 130–134.
Wang Fujun, Cheng Jiangang, Yao Zhenhan, Huang Cunjun, Kou Zhejun. A new contact algorithm for numerical simulation of structure crashworthiness [J]. *Engineering Mechanics*, 2002, 19(1): 130–134. (in Chinese)
- [20] Belytschko T, Yeh I S. The splitting pinball method for contact-impact problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, 105: 375–393.