第二章 静电场

Electrostatic Field

刘艳红

山西大同大学物理与电子科学学院

September 30,2013

第二章 静电场(Electrostatic Field)

第二章 静电场(Electrostatic Field)

静电场:相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场。

第二章 静电场(Electrostatic Field)

静电场:相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场。

- 本章内容: 电磁场的基本理论应用到最简单的情况—电荷静止,相应的电场不随时间而变化。

第二章 静电场(Electrostatic Field)

静电场:相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场。

- 本章内容: 电磁场的基本理论应用到最简单的情况—电荷静止,相应的电场不随时间而变化。
- 本章研究的主要问题: 在给定自由电荷分布及周围空间介质和导体分布的情况下,求解静电场。

第二章 静电场(Electrostatic Field)

静电场:相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场。

- 本章内容：电磁场的基本理论应用到最简单的情况—电荷静止，相应的电场不随时间而变化。
- 本章研究的主要问题：在给定自由电荷分布及周围空间介质和导体分布的情况下，求解静电场。

第二章 静电场(Electrostatic Field)

第二章 静电场(Electrostatic Field)

- 本章重点：静电势及其特性、分离变量法、镜像法。

第二章 静电场(Electrostatic Field)

- 本章重点：静电势及其特性、分离变量法、镜像法。
- 本章难点：分离变量法、电多极矩

第二章 静电场(Electrostatic Field)

- 本章重点：静电势及其特性、分离变量法、镜像法。

- 本章难点：分离变量法、电多极矩

第二章 静电场(Electrostatic Field)

内容目录:

- 1.静电势及其微分方程

第二章 静电场(Electrostatic Field)

内容目录:

- 1.静电势及其微分方程
- 2.唯一性定理

第二章 静电场(Electrostatic Field)

内容目录:

- 1.静电势及其微分方程
- 2.唯一性定理
- 3.分离变量法

内容目录:

第二章 静电场(Electrostatic Field)

内容目录:

- 1.静电势及其微分方程
- 2.唯一性定理
- 3.分离变量法
- 4.镜像法
- 5.格林函数法

第二章 静电场(Electrostatic Field)

内容目录:

- 1.静电势及其微分方程
- 2.唯一性定理
- 3.分离变量法
- 4.镜像法
- 5.格林函数法
- 6.电多极矩

内容目录:

- 1.静电势及其微分方程
- 2.唯一性定理
- 3.分离变量法
- 4.镜像法
- 5.格林函数法
- 6.电多极矩

第一节静电场的标势及其微分方程

教学目标 (Teaching Objectives）：

第一节静电场的标势及其微分方程

教学目标 (Teaching Objectives)：

- 静电场的标势;

第一节静电场的标势及其微分方程

教学目标 (Teaching Objectives）：

- 静电场的标势;
- 静电势的微分方程及边值关系;

第一节静电场的标势及其微分方程

教学目标 (Teaching Objectives）：

- 静电场的标势;
- 静电势的微分方程及边值关系;
- 静电场的能量

第一节静电场的标势及其微分方程

教学目标 (Teaching Objectives）：

- 静电场的标势;
- 静电势的微分方程及边值关系;
- 静电场的能量

一、静电场的标势 (Scale Potential)

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 1.静电势的引入

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 1.静电势的引入
- 对于静电场$\vec{E}$,由于: $\nabla\times\vec{E}=0$,从而引入任意标量$\boldsymbol{\Phi}$,使得:

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 1.静电势的引入
- 对于静电场$\vec{E}$,由于: $\nabla \times \vec{E} = 0$,从而引入任意标量$\mathbf{\Phi}$,使得:

$$\vec{E} = -\nabla \mathbf{\Phi} \tag{1}$$

其中$\mathbf{\Phi}$—静电势

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 1.静电势的引入
- 对于静电场$\vec{E}$,由于: $\nabla\times\vec{E}=0$,从而引入任意标量$\mathbf{\Phi}$,使得:

$$\vec{E}=-\nabla\mathbf{\Phi} \tag{1}$$

其中$\mathbf{\Phi}$—静电势

讨论:

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 1.静电势的引入
- 对于静电场$\vec{E}$,由于: $\nabla\times\vec{E}=0$,从而引入任意标量$\mathbf{\Phi}$,使得:

$$\vec{E}=-\nabla\mathbf{\Phi} \tag{1}$$

其中$\mathbf{\Phi}$—静电势

讨论:

- 取$\mathbf{\Phi}$的选择不唯一，相差一个常数，只要知道$\mathbf{\Phi}$即可确定$\vec{E}$。

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 1.静电势的引入
- 对于静电场$\vec{E}$,由于: $\nabla\times\vec{E}=0$,从而引入任意标量$\mathbf{\Phi}$,使得:

$$\vec{E}=-\nabla\mathbf{\Phi} \tag{1}$$

其中$\mathbf{\Phi}$—静电势

讨论:

- 取$\mathbf{\Phi}$的选择不唯一，相差一个常数，只要知道$\mathbf{\Phi}$即可确定$\vec{E}$。
- 取负号是为了与电磁学讨论一致（电场强度的方向由正指向负电荷，即指向电势减小的方向，而$\nabla\mathbf{\Phi}$是$\mathbf{\Phi}$增大的方向。）

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 1.静电势的引入
- 对于静电场$\vec{E}$,由于：$\nabla\times\vec{E}=0$,从而引入任意标量$\mathbf{\Phi}$,使得:

$$\vec{E}=-\nabla\mathbf{\Phi} \tag{1}$$

其中$\mathbf{\Phi}$—静电势

讨论:

- 取$\mathbf{\Phi}$的选择不唯一，相差一个常数，只要知道$\mathbf{\Phi}$即可确定$\vec{E}$。
- 取负号是为了与电磁学讨论一致（电场强度的方向由正指向负电荷，即指向电势减小的方向，而$\nabla\mathbf{\Phi}$是$\mathbf{\Phi}$增大的方向。）

一、静电场的标势 (Scale Potential)

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 2.静电势的计算

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 2.静电势的计算
- a.电势差

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 2.静电势的计算
- a.电势差

我们知道单指空间某点电势是无意义的，只有两点间的电势差才有意义。

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 2.静电势的计算
- a.电势差

我们知道单指空间某点电势是无意义的，只有两点间的电势差才有意义。

电势差：任意两点的电势差（$\vec{x}$与$\vec{x}_0$之间）等于电场将单位电荷从$\vec{x}_0$点移到$\vec{x}$点作的功的负值：

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 2.静电势的计算
- a.电势差

我们知道单指空间某点电势是无意义的，只有两点间的电势差才有意义。

电势差：任意两点的电势差（$\vec{x}$与$\vec{x}_0$之间）等于电场将单位电荷从$\vec{x}_0$点移到$\vec{x}$点作的功的负值：

$$\phi(x) - \phi(x_0) = -\int_{x_0}^{x} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{2}$$

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 2.静电势的计算
- a.电势差

我们知道单指空间某点电势是无意义的，只有两点间的电势差才有意义。

电势差：任意两点的电势差（$\vec{x}$与$\vec{x}_0$之间）等于电场将单位电荷从$\vec{x}_0$点移到$\vec{x}$点作的功的负值：

$$\phi(x)-\phi(x_0)=-\int_{x_0}^{x}\vec{E}\cdot d\vec{l} \tag{2}$$

一、静电场的标势 (Scale Potential)

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 原因:

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 原因:

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dl} \Rightarrow d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{3}$$

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 原因:

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dl} \Rightarrow d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (3)$$

- 电场力做正功时: $\phi(x) < \phi(x_0)$ 电势下降

  电场力做负功时: $\phi(x) < \phi(x_0)$ 电势上升

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 原因:

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dl} \Rightarrow d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (3)$$

- 电场力做正功时：$\phi(x) < \phi(x_0)$ 电势下降
  电场力做负功时：$\phi(x) < \phi(x_0)$ 电势上升
- 两点之间的电势差与做功路径无关，
  即：$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$。

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 原因:

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dl} \Rightarrow d\phi = \nabla\phi\cdot d\vec{l} = -\vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (3)$$

- 电场力做正功时: $\phi(x) < \phi(x_0)$ 电势下降
  电场力做负功时: $\phi(x) < \phi(x_0)$ 电势上升
- 两点之间的电势差与做功路径无关,
  即: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$。
- 证明: 电势差与路径无关, 只与两个端点的位置有关。

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 原因:

$$\nabla\phi = \frac{d\phi}{dl} \Rightarrow d\phi = \nabla\phi \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (3)$$

- 电场力做正功时: $\phi(x) < \phi(x_0)$ 电势下降
  电场力做负功时: $\phi(x) < \phi(x_0)$ 电势上升
- 两点之间的电势差与做功路径无关,
  即: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$。
- 证明: 电势差与路径无关, 只与两个端点的位置有关。

一、静电场的标势 (Scale Potential)

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- b.参考点

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- b.参考点
  用电势描述电场时，必须选择电势零点，
  如果$\phi(x_0) = 0$,则任意一点的电势为:

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- b.参考点

  用电势描述电场时，必须选择电势零点，如果$\phi(x_0) = 0$,则任意一点的电势为:

$$\phi(x) = -\int_{x_0}^{x} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{4}$$

表示单位电荷在该点的静电势能。

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- b.参考点

  用电势描述电场时，必须选择电势零点，如果$\phi(x_0)=0$,则任意一点的电势为：

$$\phi(x) = -\int_{x_0}^{x} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{4}$$

表示单位电荷在该点的静电势能。

特例：当电荷分布于有限区域时，通常以无穷远即$x_0=\infty$为电势零点，则任意一点电势为：

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- b.参考点

  用电势描述电场时，必须选择电势零点，如果$\phi(x_0) = 0$,则任意一点的电势为:

$$\phi(x) = -\int_{x_0}^{x} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{4}$$

表示单位电荷在该点的静电势能。

特例：当电荷分布于有限区域时，通常以无穷远即$x_0 = \infty$为电势零点，则任意一点电势为:

$$\phi(x) = -\int_{\infty}^{x} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{x}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{5}$$

一、静电场的标势 (Scale Potential)

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 电荷分布在有限区域的几种情况:

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 电荷分布在有限区域的几种情况:
- 点电荷（Q）： $\phi(\infty) = 0$

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 电荷分布在有限区域的几种情况:
- 点电荷（Q）： $\phi(\infty) = 0$

$$\phi(P) = \int_r^\infty \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6}$$

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 电荷分布在有限区域的几种情况:
- 点电荷（Q）： $\phi(\infty) = 0$

$$\phi(P) = \int_r^\infty \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6}$$

- 点电荷组:$(Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots)$:

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 电荷分布在有限区域的几种情况:
- 点电荷（Q）： $\phi(\infty) = 0$

$$\phi(P) = \int_r^\infty \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6}$$

- 点电荷组:$(Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots)$:

$$\phi(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{Q}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{7}$$

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 电荷分布在有限区域的几种情况:
- 点电荷（Q）: $\phi(\infty) = 0$

$$\phi(P) = \int_r^\infty \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6}$$

- 点电荷组:$(Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots)$:

$$\phi(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{Q}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{7}$$

- 电荷连续分布:

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 电荷分布在有限区域的几种情况:
- 点电荷（Q）： $\phi(\infty)=0$

$$\phi(P)=\int_r^{\infty}\frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r'^2}dr'=\frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6}$$

- 点电荷组:$(Q_1,Q_2,\ldots,Q_i,\ldots)$:

$$\phi(P)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{Q}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{7}$$

- 电荷连续分布:

$$\phi(P)=\int_V\frac{\rho(\vec{x'})dv'}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{8}$$

一、静电场的标势 (Scale Potential)

- 电荷分布在有限区域的几种情况:
- 点电荷（Q）: $\phi(\infty) = 0$

$$\phi(P) = \int_r^{\infty} \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6}$$

- 点电荷组:$(Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots)$:

$$\phi(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{Q}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{7}$$

- 电荷连续分布:

$$\phi(P) = \int_V \frac{\rho(\vec{x'}) dv'}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{8}$$

二、静电势的微分方程和边值关系

二、静电势的微分方程和边值关系

- 1.电势满足的方程

二、静电势的微分方程和边值关系

- 1.电势满足的方程

由电势的定义式及电场是有源场可推得:

$$\left\{ \right.$$

二、静电势的微分方程和边值关系

- 1.电势满足的方程

由电势的定义式及电场是有源场可推得:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases} \tag{9}$$

二、静电势的微分方程和边值关系

- 1. 电势满足的方程

由电势的定义式及电场是有源场可推得:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases} \tag{9}$$

对于各向同性均匀介质的本构关系为 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$，因此:

二、静电势的微分方程和边值关系

- 1.电势满足的方程

由电势的定义式及电场是有源场可推得:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases} \tag{9}$$

对于各向同性均匀介质的本构关系为 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$，因此:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{10}$$

公式（10）称为泊松方程（Poisson Equation）

二、静电势的微分方程和边值关系

- 1.电势满足的方程

由电势的定义式及电场是有源场可推得:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases} \tag{9}$$

对于各向同性均匀介质的本构关系
为 $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$，因此:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{10}$$

公式（10）称为泊松方程（Poisson Equation）

二、静电势的微分方程和边值关系

二、静电势的微分方程和边值关系

讨论:

- (1) Poisson方程成立的条件：均匀介质+静电场

二、静电势的微分方程和边值关系

讨论:

- (1) Poisson方程成立的条件：均匀介质+静电场
- (2) ρ是自由电荷体密度

二、静电势的微分方程和边值关系

讨论:

- (1) Poisson方程成立的条件：均匀介质+静电场
- (2) ρ是自由电荷体密度
- (3) Poisson方程中包含了$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$和$\nabla \times \vec{E} = 0$

二、静电势的微分方程和边值关系

讨论:

- (1) Poisson方程成立的条件：均匀介质+静电场
- (2) ρ是自由电荷体密度
- (3) Poisson方程中包含了$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$和$\nabla \times \vec{E} = 0$
- (4) 特殊的Poisson方程—拉普拉斯方程（Laplace Equation）：
  $\nabla^2 \phi = 0$（适用于无自由电荷分布的均匀介质）

二、静电势的微分方程和边值关系

讨论:

- (1) Poisson方程成立的条件：均匀介质$+$静电场
- (2) ρ是自由电荷体密度
- (3) Poisson方程中包含了$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$和$\nabla\times\vec{E}=0$
- (4) 特殊的Poisson方程—拉普拉斯方程（Laplace Equation）：
  $\nabla^2\phi=0$（适用于无自由电荷分布的均匀介质）

二、静电势的微分方程和边值关系

二、静电势的微分方程和边值关系

- 2.静电势的边值关系

二、静电势的微分方程和边值关系

- 2.静电势的边值关系

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \tag{11}$$

二、静电势的微分方程和边值关系

- 2.静电势的边值关系

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \tag{11}$$

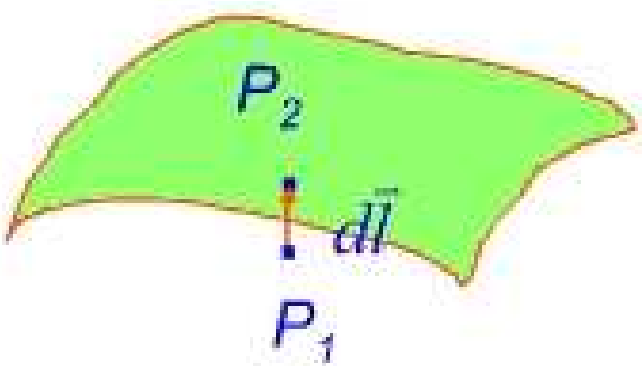
即$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$在界面上的应用

二、静电势的微分方程和边值关系

- 2.静电势的边值关系

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \qquad (11)$$

即$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$在界面上的应用



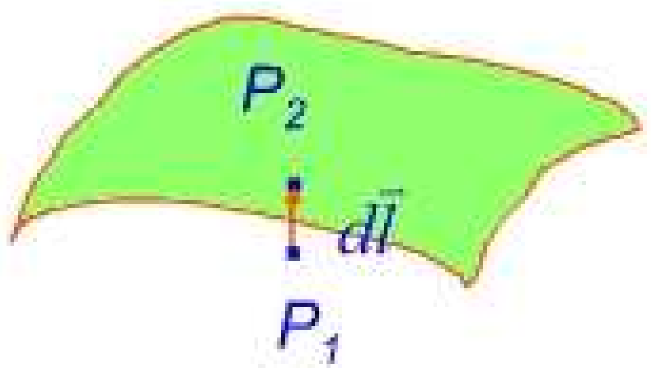
二、静电势的微分方程和边值关系

- 2.静电势的边值关系

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \qquad (11)$$

即 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 在界面上的应用

考虑到界面上无限靠近的 P_1, P_2 点的电势差:

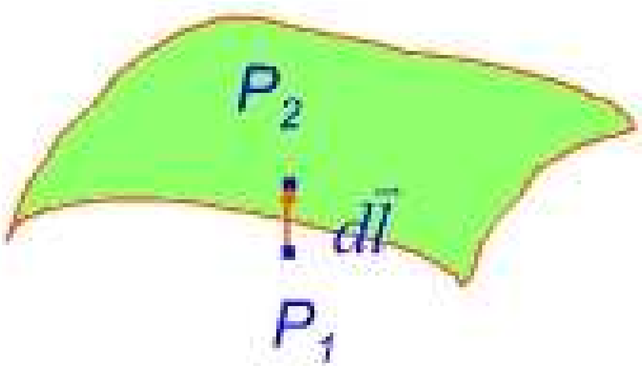


二、静电势的微分方程和边值关系

- 2.静电势的边值关系

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \tag{11}$$

即$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$在界面上的应用



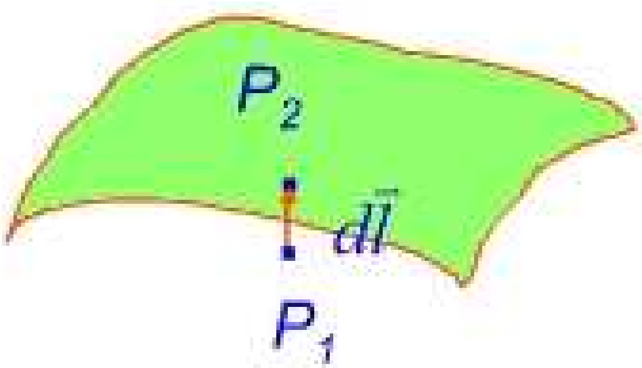
考虑到界面上无限靠近的P_1,P_2点的电势差:$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

二、静电势的微分方程和边值关系

- 2.静电势的边值关系

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \tag{11}$$

即$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$在界面上的应用



考虑到界面上无限靠近

的P_1,P_2点的电势差:$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

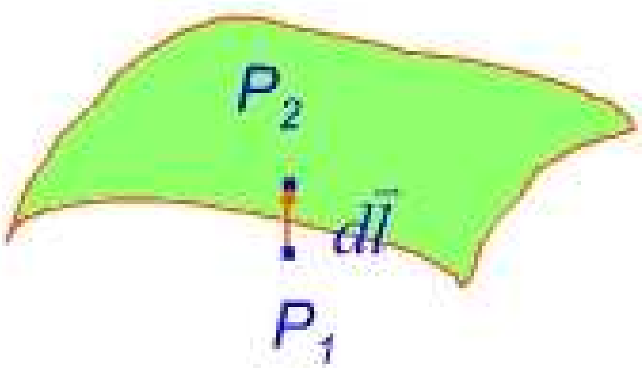
由于$d\vec{l} = 0$ 所以$\phi_1 = \phi_2$

二、静电势的微分方程和边值关系

- 2.静电势的边值关系

$$\hat{n}\times\vec{E}=0 \tag{11}$$

即$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$在界面上的应用



考虑到界面上无限靠近

的P_1,P_2点的电势差:$d\phi=-\vec{E}\cdot d\vec{l}$

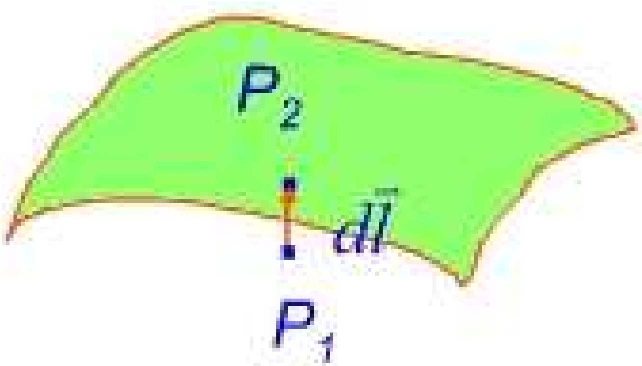
由于$d\vec{l}=0$ 所以$\phi_1=\phi_2$

利用边值关系: $\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma$

- 2.静电势的边值关系

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \tag{11}$$

即$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$在界面上的应用



考虑到界面上无限靠近的P_1,P_2点的电势差:$d\phi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

由于$d\vec{l} = 0$ 所以$\phi_1 = \phi_2$

利用边值关系：$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$

$$\hat{n} \cdot \vec{D}_2 = \epsilon_2 \hat{n} \cdot \vec{E}_2 = -\epsilon_2 \hat{n} \cdot \nabla \phi_2 = -\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

可得: $\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma$

二、静电势的微分方程和边值关系

二、静电势的微分方程和边值关系

总结：1.对于两种介质界面处的边值关系为

二、静电势的微分方程和边值关系

总结：1.对于两种介质界面处的边值关系为

总结：1.对于两种介质界面处的边值关系为

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2 \\ \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \tag{12}$$

二、静电势的微分方程和边值关系

总结：1.对于两种介质界面处的边值关系为

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2 \\ \epsilon_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \tag{12}$$

2.对于导体和介质界面处的边值关系为: 由于$\phi_1 =$常量，$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0$

二、静电势的微分方程和边值关系

总结：1.对于两种介质界面处的边值关系为

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2 \\ \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \quad (12)$$

2.对于导体和介质界面处的边值关系为: 由于$\phi_1 =$常量，$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0$

$$\begin{cases} \end{cases}$$

二、静电势的微分方程和边值关系

总结：1.对于两种介质界面处的边值关系为

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2 \\ \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \tag{12}$$

2.对于导体和介质界面处的边值关系为: 由于ϕ_1=常量，$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0$

$$\begin{cases} \phi = C \\ \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \tag{13}$$

二、静电势的微分方程和边值关系

总结：1.对于两种介质界面处的边值关系为

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2 \\ \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \tag{12}$$

2.对于导体和介质界面处的边值关系为: 由于$\phi_1 =$常量，$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = 0$

$$\begin{cases} \phi = C \\ \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\sigma \end{cases} \tag{13}$$

二、静电势的微分方程和边值关系

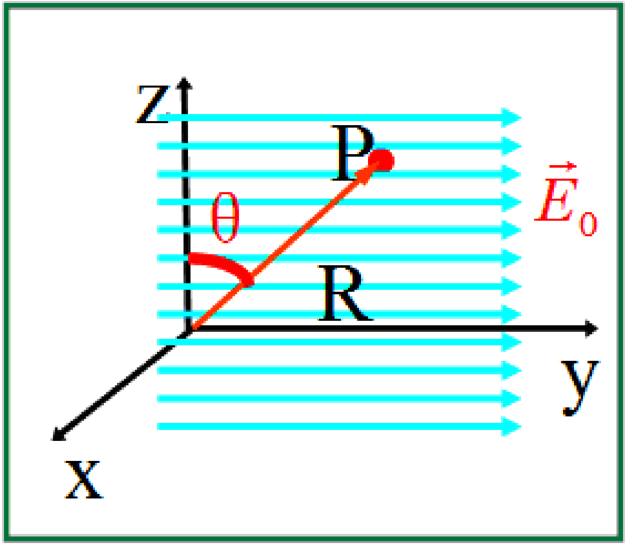
例题：求均匀电场$\vec{E}_0$的电势。

二、静电势的微分方程和边值关系

例题：求均匀电场$\vec{E}_0$的电势。

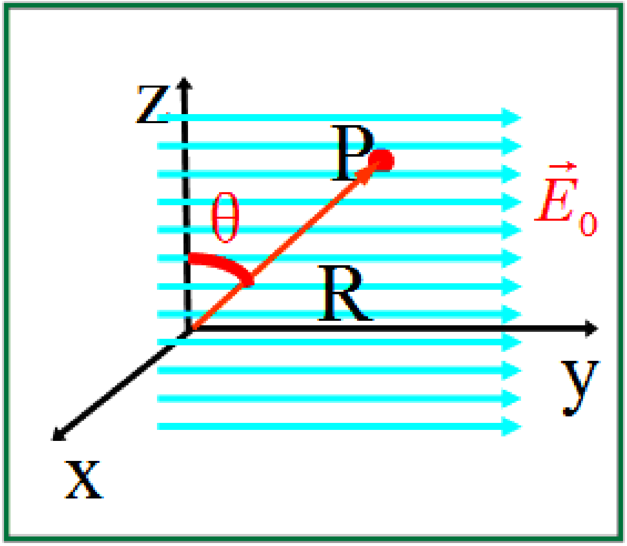
二、静电势的微分方程和边值关系

例题：求均匀电场$\vec{E}_0$的电势。



二、静电势的微分方程和边值关系

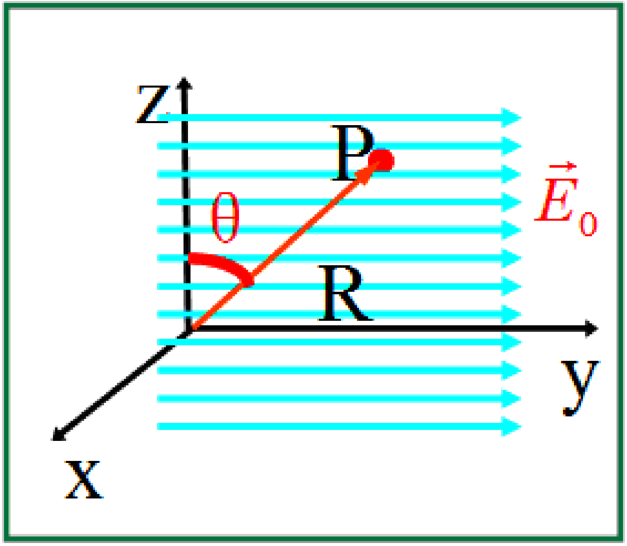
例题：求均匀电场$\vec{E}_0$的电势。



解:均匀电场可看作由两无限大平行板组成的电容器产生的电场。因为电荷分布在无穷区域，可选空间任一点为参考点，为方便取坐标原点为参考点，电势为$\phi = \phi_0$

二、静电势的微分方程和边值关系

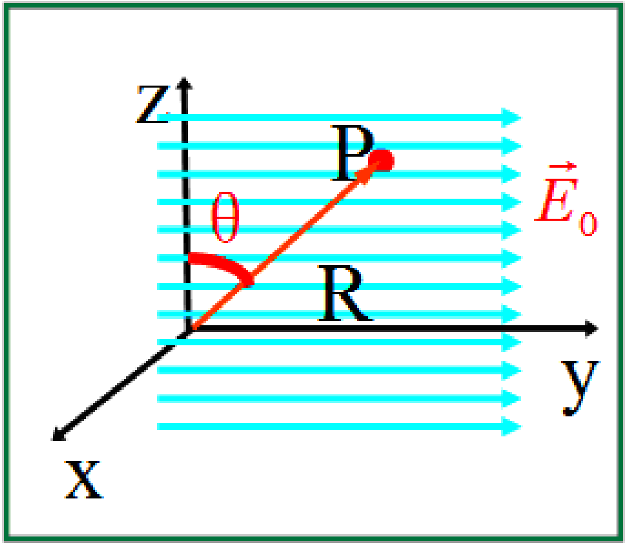
例题：求均匀电场$\vec{E}_0$的电势。



解:均匀电场可看作由两无限大平行板组成的电容器产生的电场。因为电荷分布在无穷区域，可选空间任一点为参考点，为方便取坐标原点为参考点，电势为$\phi = \phi_0$

$$\phi_0 - \phi_P = \int_0^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_0 \cdot \int_0^P d\vec{l} = \vec{E}_0 \cdot \vec{R} \quad (14)$$

例题：求均匀电场$\vec{E}_0$的电势。



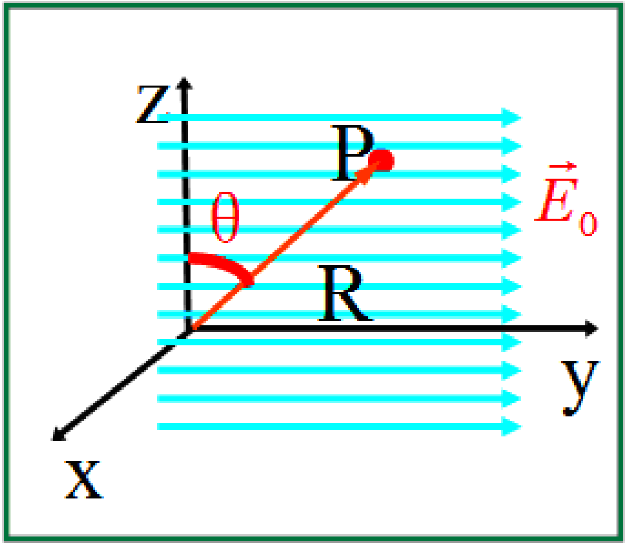
解:均匀电场可看作由两无限大平行板组成的电容器产生的电场。因为电荷分布在无穷区域，可选空间任一点为参考点，为方便取坐标原点为参考点，电势为$\phi=\phi_0$

$$\phi_0-\phi_P=\int_0^P \vec{E}\cdot d\vec{l}=\vec{E}_0\cdot\int_0^P d\vec{l}=\vec{E}_0\cdot\vec{R} \tag{14}$$

$$\phi_P=\phi_0-\vec{E}_0\cdot\vec{R}=\phi_0-E_0R\cos\theta \tag{15}$$

二、静电势的微分方程和边值关系

例题：求均匀电场$\vec{E}_0$的电势。



解:均匀电场可看作由两无限大平行板组成的电容器产生的电场。因为电荷分布在无穷区域，可选空间任一点为参考点，为方便取坐标原点为参考点，电势为$\phi = \phi_0$

$$\phi_0 - \phi_P = \int_0^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_0 \cdot \int_0^P d\vec{l} = \vec{E}_0 \cdot \vec{R} \tag{14}$$

$$\phi_P = \phi_0 - \vec{E}_0 \cdot \vec{R} = \phi_0 - E_0 R \cos\theta \tag{15}$$

三、静电场的能量

三、静电场的能量

- 1.对于一般方程，能量密度为：$\omega = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$

三、静电场的能量

- 1.对于一般方程，能量密度为：$\omega = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$

则总能量为：

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} dV \tag{16}$$

三、静电场的能量

- 1.对于一般方程，能量密度为：$\omega = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

则总能量为：

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{E}\cdot\vec{D}dV \tag{16}$$

- 2.若已知ρ,ϕ总能量的方程形式：

三、静电场的能量

- 1.对于一般方程，能量密度为：$\omega = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$

则总能量为：

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} dV \tag{16}$$

- 2.若已知ρ, ϕ总能量的方程形式：

$$\vec{E} \cdot \vec{D} = -\nabla\phi \cdot \vec{D} = -\nabla \cdot (\phi\vec{D} + \phi\nabla \cdot \vec{D}) = \rho\phi - \nabla \cdot (\phi\vec{D}) \tag{17}$$

三、静电场的能量

- 1.对于一般方程，能量密度为：$\omega=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

则总能量为：

$$W=\frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{E}\cdot\vec{D}dV \tag{16}$$

- 2.若已知ρ,ϕ总能量的方程形式：

$$\vec{E}\cdot\vec{D}=-\nabla\phi\cdot\vec{D}=-\nabla\cdot(\phi\vec{D}+\phi\nabla\cdot\vec{D})=\rho\phi-\nabla\cdot(\phi\vec{D}) \tag{17}$$

$$W=\frac{1}{2}\int_{\infty}[\rho\phi-\nabla\cdot(\phi\vec{D})]dV \tag{18}$$

三、静电场的能量

- 1.对于一般方程，能量密度为：$\omega = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

则总能量为：

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty}\vec{E}\cdot\vec{D}dV \tag{16}$$

- 2.若已知ρ,ϕ总能量的方程形式：

$$\vec{E}\cdot\vec{D} = -\nabla\phi\cdot\vec{D} = -\nabla\cdot(\phi\vec{D}+\phi\nabla\cdot\vec{D}) = \rho\phi-\nabla\cdot(\phi\vec{D}) \tag{17}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty}[\rho\phi-\nabla\cdot(\phi\vec{D})]dV \tag{18}$$

而$\int\nabla\cdot(\phi\vec{D})dV = \oint\phi\vec{D}\cdot d\vec{S}$

三、静电场的能量

三、静电场的能量

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \rho\phi dV - \frac{1}{2}\oint \phi\vec{D}\cdot d\vec{S} \tag{19}$$

三、静电场的能量

$$W=\frac{1}{2}\int_{\infty}\rho\phi dV-\frac{1}{2}\oint\phi\vec{D}\cdot d\vec{S} \tag{19}$$

其中第二项中由于$\phi\sim\frac{1}{r}$，$D\sim\frac{1}{r^2}$，面积$\sim r^2$，故$r\to\infty$时第二项趋于零。所以：

$$W=\frac{1}{2}\int_{\infty}\rho\phi dV \tag{20}$$

三、静电场的能量

$$W=\frac{1}{2}\int_{\infty}\rho\phi dV-\frac{1}{2}\oint\phi\vec{D}\cdot d\vec{S} \tag{19}$$

其中第二项中由于$\phi\sim\frac{1}{r}$，$D\sim\frac{1}{r^2}$，面积$\sim r^2$，故$r\rightarrow\infty$时第二项趋于零。所以：

$$W=\frac{1}{2}\int_{\infty}\rho\phi dV \tag{20}$$

讨论：

- 1. $\frac{1}{2}\rho\phi$不是静电场的能量密度。ρ自由电荷体密度，ϕ为dr处的电势。

三、静电场的能量

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \rho\phi dV - \frac{1}{2}\oint \phi\vec{D}\cdot d\vec{S} \tag{19}$$

其中第二项中由于$\phi \sim \frac{1}{r}$，$D \sim \frac{1}{r^2}$，面积$\sim r^2$，故$r \to \infty$时第二项趋于零。所以:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \rho\phi dV \tag{20}$$

讨论:

- 1. $\frac{1}{2}\rho\phi$不是静电场的能量密度。ρ自由电荷体密度，ϕ为dr处的电势。
- 2. 若自由电荷是面分布，面密度为σ,则: 总能量为：$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma\phi ds$。

三、静电场的能量

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \rho\phi dV - \frac{1}{2}\oint \phi\vec{D}\cdot d\vec{S} \tag{19}$$

其中第二项中由于$\phi \sim \frac{1}{r}$，$D \sim \frac{1}{r^2}$，面积$\sim r^2$，故$r \to \infty$时第二项趋于零。所以:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \rho\phi dV \tag{20}$$

讨论:

- 1. $\frac{1}{2}\rho\phi$不是静电场的能量密度。ρ自由电荷体密度，ϕ为dr处的电势。
- 2. 若自由电荷是面分布，面密度为σ,则:总能量为: $W = \frac{1}{2}\int_S \sigma\phi ds$。

三、静电场的能量

三、静电场的能量

- 3.若全空间充满均匀介质$\rho_p = -(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon})\rho_f$故总的电荷密度为：$\rho_{tot} = \rho_p + \rho_f = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\rho_f$

- 3.若全空间充满均匀介质$\rho_p = -(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon})\rho_f$故总的电荷密度为：$\rho_{tot} = \rho_p + \rho_f = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\rho_f$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_{tot}(\vec{x})}{r}dV = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{x'})}{r}dV \qquad (21)$$

三、静电场的能量

- 3.若全空间充满均匀介质$\rho_p = -(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon})\rho_f$故总的电荷密度为：$\rho_{tot} = \rho_p + \rho_f = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\rho_f$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_{tot}(\vec{x})}{r}dV = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{x'})}{r}dV \tag{21}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho_f(\vec{x})\phi dV = \frac{1}{8\pi\epsilon}\int dV' \int_V \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x'})}{r}dV \tag{22}$$

三、静电场的能量

- 3.若全空间充满均匀介质$\rho_p = -(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon})\rho_f$故总的电荷密度为：$\rho_{tot} = \rho_p + \rho_f = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\rho_f$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho_{tot}(\vec{x})}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_V \frac{\rho(\vec{x'})}{r} dV \tag{21}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho_f(\vec{x})\phi dV = \frac{1}{8\pi\epsilon}\int dV' \int_V \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x'})}{r} dV \tag{22}$$

r为$\vec{x}$ 与$\vec{x'}$ 的距离。