# 唯一性定理
# Uniqueness Theorem

刘艳红
山西大同大学物理与电子科学学院

October 7,2013

# 研究内容 (teaching objectives)

# 研究内容 (teaching objectives)

1. 需要给出那些条件，静电场的解唯一被确定？

# 研究内容 (teaching objectives)

1. 需要给出那些条件，静电场的解唯一被确定？

2. 静电场学中许多问题都涉及到有限空间区域，在区域内可以有电荷，也可以无电荷。但都具有确定的边界条件。要使区域内存在唯一的、合理的解，需要Poisson方程的边界条件是什么？唯一性定理回答了这个问题。

# 教学目标 (teaching objectives)

## 教学目标 (teaching objectives)

1. 静电问题的唯一性定理;

# 教学目标 (teaching objectives)

1. 静电问题的唯一性定理;
2. 有导体存在时的唯一性定理

# 教学目标 (teaching objectives)

1. 静电问题的唯一性定理;
2. 有导体存在时的唯一性定理

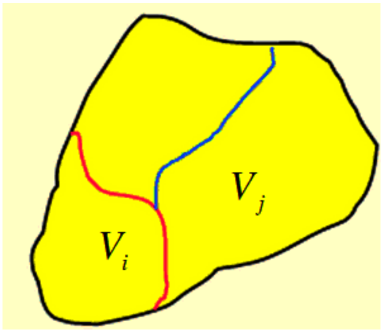
# 一、静电问题的唯一性定理

# 一、静电问题的唯一性定理

- 静电问题

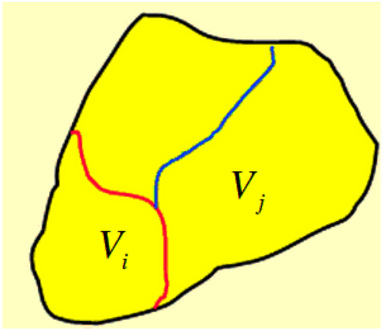
# 一、静电问题的唯一性定理

- 静电问题



# 一、静电问题的唯一性定理

- 静电问题

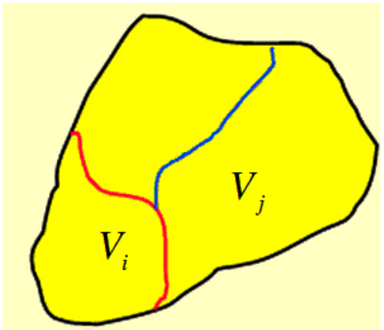



在可以均匀分区的区域V内，每一个分区域的介电常数为$\epsilon_i$,设V内有给定的自由电荷分布$\rho(\vec{x})$则电势$\phi$在$V_i$内满足的方程:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_i} \tag{1}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

- 静电问题




在可以均匀分区的区域V内，每一个分区域的介电常数为$\epsilon_i$,设V内有给定的自由电荷分布$\rho(\vec{x})$则电势$\phi$在$V_i$内满足的方程:

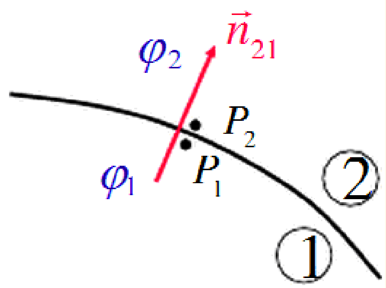
$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_i} \tag{1}$$

需要求解所有边界上满足边值关系或者给定边界条件的Poisson方程的解。

# 一、静电问题的唯一性定理

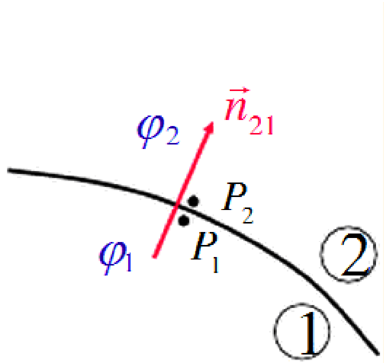
# 一、静电问题的唯一性定理

已知静电势的边值关系：



# 一、静电问题的唯一性定理

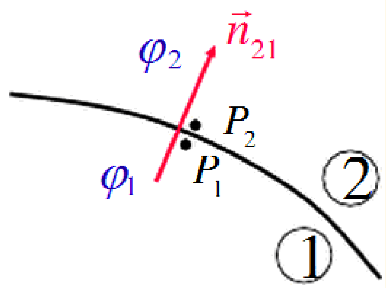
已知静电势的边值关系：




$$\phi_1 = \phi_2 \tag{2}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

已知静电势的边值关系：

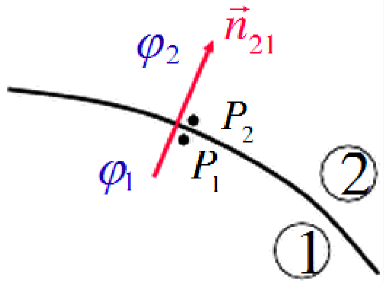



$$\phi_1 = \phi_2 \tag{2}$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \tag{3}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

已知静电势的边值关系：




$$\phi_1 = \phi_2 \tag{2}$$

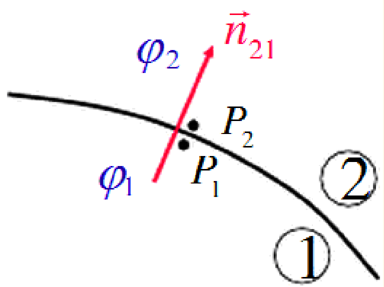
$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = -\sigma \tag{3}$$

若分界面上无自由电荷分布，则：

$$\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \tag{4}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

已知静电势的边值关系：




$$\phi_1 = \phi_2 \tag{2}$$

$$\epsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n} - \epsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = -\sigma \tag{3}$$

若分界面上无自由电荷分布，则：

$$\epsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n} = \epsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} \tag{4}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

# 一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

# 一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域V内给定自由电荷分布$\rho(\vec{x})$，在V的边界S上给定：

  - 电势$\phi/_s$

# 一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域V内给定自由电荷分布$\rho(\vec{x})$，在V的边界S上给定:

- 电势$\phi/_s$
- 电势的法线方向偏导数$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$

# 一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域V内给定自由电荷分布$\rho(\vec{x})$，在V的边界S上给定:

- 电势$\phi/_s$
- 电势的法线方向偏导数$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$

则V内的电场唯一确定。

可以采用反证法证明:

- a.假设两组不同的解$\phi'$和$\phi''$都满足唯一性定理。

# 一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域V内给定自由电荷分布$\rho(\vec{x})$，在V的边界S上给定:

- 电势$\phi/_s$
- 电势的法线方向偏导数$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$

则V内的电场唯一确定。

可以采用反证法证明:

- a.假设两组不同的解$\phi'$和$\phi''$都满足唯一性定理。
- b. 证明$\phi'$与$\phi''$ 至多差一个常数。

# 一、静电问题的唯一性定理

- 唯一性定理的内容

设区域V内给定自由电荷分布$\rho(\vec{x})$，在V的边界S上给定:

- 电势$\phi/_s$
- 电势的法线方向偏导数$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$

则V内的电场唯一确定。

可以采用反证法证明:

- a.假设两组不同的解$\phi'$和$\phi''$都满足唯一性定理。
- b. 证明$\phi'$与$\phi''$ 至多差一个常数。

# 一、静电问题的唯一性定理

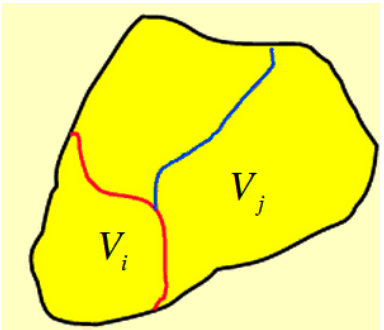
# 一、静电问题的唯一性定理

- c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。

# 一、静电问题的唯一性定理

- c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。

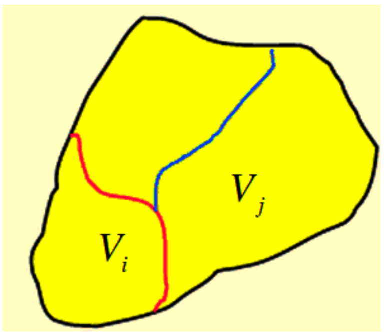
证明:



# 一、静电问题的唯一性定理

- c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。

证明:

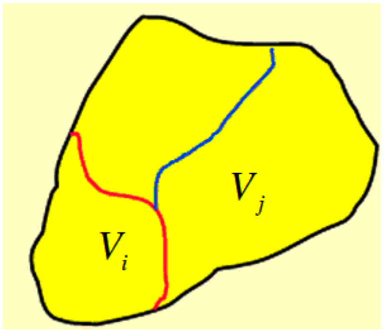



假设有两组不同的解：$\phi'$和$\phi''$，都满足唯一性定理的条件，写出Poisson方程:

$$\nabla^2\phi' = -\frac{\rho}{\epsilon_i} \tag{5}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

- c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。




证明：

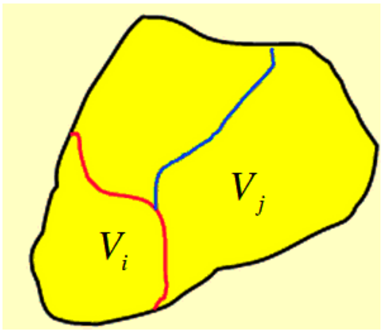
假设有两组不同的解：$\phi'$和$\phi''$，都满足唯一性定理的条件，写出Poisson方程：

$$\nabla^2\phi' = -\frac{\rho}{\epsilon_i} \tag{5}$$

$$\nabla^2\phi'' = -\frac{\rho}{\epsilon_i} \tag{6}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

- c. 电势相差一个常数对电场无影响这就证明了电场的唯一性定理。




证明:

假设有两组不同的解: $\phi'$和$\phi''$, 都满足唯一性定理的条件, 写出Poisson方程:

$$\nabla^2\phi' = -\frac{\rho}{\epsilon_i} \tag{5}$$

$$\nabla^2\phi'' = -\frac{\rho}{\epsilon_i} \tag{6}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

# 一、静电问题的唯一性定理

设定：$\phi = \phi' - \phi''$,因此对于每个均匀区域
有$\nabla^2\phi = 0$
另一方面，在介质分界面上，$\phi'$和$\phi''$满足

$$\phi'_i = \phi'_j$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \phi'_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi'_j}{\partial n}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

设定：$\phi = \phi' - \phi''$,因此对于每个均匀区域

有$\nabla^2\phi = 0$

另一方面，在介质分界面上，$\phi'$和$\phi''$满足

$$\phi'_i = \phi'_j \qquad \phi''_i = \phi''_j$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \phi'_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi'_j}{\partial n} \qquad \epsilon_i \frac{\partial \phi''_i}{\partial n} = \epsilon_j \frac{\partial \phi''_j}{\partial n}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

设定：$\phi = \phi' - \phi''$,因此对于每个均匀区域
有$\nabla^2\phi = 0$
另一方面，在介质分界面上，$\phi'$和$\phi''$满足

$$\phi'_i = \phi'_j \qquad \phi''_i = \phi''_j$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \phi'_i}{\partial \boldsymbol{n}} = \epsilon_j \frac{\partial \phi'_j}{\partial \boldsymbol{n}} \qquad \epsilon_i \frac{\partial \phi''_i}{\partial \boldsymbol{n}} = \epsilon_j \frac{\partial \phi''_j}{\partial \boldsymbol{n}}$$

因此在分界面上$\phi$和$\epsilon\frac{\partial \phi'}{\partial n}$都是连续的。

# 一、静电问题的唯一性定理

# 一、静电问题的唯一性定理

在V的外边界S上给定边界条件:

$$\phi/_{s} = \phi'/_{s} - \phi''/_{s} = 0 \tag{7}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

在V的外边界S上给定边界条件:

$$\phi/_s = \phi'/_s - \phi''/_s = 0 \tag{7}$$

或者

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}/_s = \frac{\partial \phi'}{\partial n}/_s - \frac{\partial \phi''}{\partial n}/_s = 0 \tag{8}$$

## 一、静电问题的唯一性定理

在V的外边界S上给定边界条件:

$$\phi/_s = \phi'/_s - \phi''/_s = 0 \tag{7}$$

或者

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{n}}/_s = \frac{\partial \phi'}{\partial \boldsymbol{n}}/_s - \frac{\partial \phi''}{\partial \boldsymbol{n}}/_s = 0 \tag{8}$$

考察第i个均匀区域$V_i$的界面上的面积分:

$$\oint_{s_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = ? \tag{9}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

在V的外边界S上给定边界条件:

$$\phi/_s = \phi'/_s - \phi''/_s = 0 \tag{7}$$

或者

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}/_s = \frac{\partial \phi'}{\partial n}/_s - \frac{\partial \phi''}{\partial n}/_s = 0 \tag{8}$$

考察第i个均匀区域$V_i$的界面上的面积分:

$$\oint_{s_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = ? \tag{9}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

# 一、静电问题的唯一性定理

$$\oint_{s_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{v_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{v_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 + \int_{v_i} \epsilon_i \phi \nabla^2 \phi dV \qquad (10)$$

# 一、静电问题的唯一性定理

$$\oint_{s_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{v_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{v_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 + \int_{v_i} \epsilon_i \phi \nabla^2 \phi dV \qquad (10)$$

对于整个区域V，有:

$$\oint_{s_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{v_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{v_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 \qquad (11)$$

# 一、静电问题的唯一性定理

$$\oint_{s_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{v_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{v_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 + \int_{v_i} \epsilon_i \phi \nabla^2 \phi dV \qquad (10)$$

对于整个区域V，有：

$$\oint_{s_i} \epsilon_i \phi \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \int_{v_i} \nabla \cdot (\epsilon_i \phi) dV = \int_{v_i} \epsilon_i (\nabla \phi)^2 \qquad (11)$$

由于在$V_i$，$V_j$分界面上，$\phi$，$\epsilon\nabla\phi$的法向分量分别相等，但是由于$d\vec{S}_i = -d\vec{S}_j$所以内部分解面得积分全部抵消，只剩下整个V的边界面S上的积分。

# 一、静电问题的唯一性定理

但是在边界面上 $\phi/_s = 0$或者是$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s = 0$所以:

$$\sum_i V_i \epsilon_i (\nabla\phi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\phi = 0 \tag{12}$$

但是在边界面上 $\phi/_s = 0$或者是$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s = 0$所以:

$$\sum_i V_i \epsilon_i (\nabla\phi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\phi = 0 \tag{12}$$

即在区域V上$\phi$为常量，因此:

$$\vec{E}\prime = -\nabla\phi' \Rightarrow \vec{E}\prime\prime = -\nabla\phi'' = -\nabla(\phi' + C) = \vec{E}\prime \tag{13}$$

# 一、静电问题的唯一性定理

但是在边界面上 $\phi/_s = 0$或者是$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s = 0$所以：

$$\sum_i V_i \epsilon_i (\nabla\phi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla\phi = 0 \qquad (12)$$

即在区域V上$\phi$为常量，因此：

$$\vec{E}\prime = -\nabla\phi' \Rightarrow \vec{E}\prime\prime = -\nabla\phi'' = -\nabla(\phi' + C) = \vec{E}\prime \qquad (13)$$

# 二、有导体存在时的唯一性定理

# 二、有导体存在时的唯一性定理

- 表述:

## 二、有导体存在时的唯一性定理

- 表述:

设区域V内有一些导体，给定导体之外的电荷分布$\rho$，给定每个导体的电势$\phi_i$或者个导体上的总电荷$Q_i$，以及V的边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$，则V 内电场唯一确定。

这样分为两类问题:

  - 第一类问题的唯一性定理

## 二、有导体存在时的唯一性定理

- 表述:

设区域V内有一些导体，给定导体之外的电荷分布$\rho$，给定每个导体的电势$\phi_i$或者个导体上的总电荷$Q_i$，以及V的边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$，则V 内电场唯一确定。

这样分为两类问题:

- 第一类问题的唯一性定理
- 第二类问题的唯一性定理

# 二、有导体存在时的唯一性定理

- 表述:

设区域V内有一些导体，给定导体之外的电荷分布$\rho$，给定每个导体的电势$\phi_i$或者个导体上的总电荷$Q_i$，以及V的边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$，则V 内电场唯一确定。

这样分为两类问题:

- 第一类问题的唯一性定理
- 第二类问题的唯一性定理

# 二、有导体存在时的唯一性定理

# 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理

## 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
    - i)V'(介质)内给定$\rho$

# 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
    - i)V'(介质)内给定$\rho$
    - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$

# 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
  - i)V'(介质)内给定$\rho$
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体i的电势$\phi_i$

# 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
    - i)V'(介质)内给定$\rho$
    - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
    - iii)每个导体i的电势$\phi_i$

则V'内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理

## 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
  - i)V'(介质)内给定$\rho$
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体i的电势$\phi_i$

则V'内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理
  - i)V'(介质)内给定$\rho$

## 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
  - i)V'(介质)内给定$\rho$
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体i的电势$\phi_i$

则V'内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理
  - i)V'(介质)内给定$\rho$
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$

## 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
    - i)V'(介质)内给定$\rho$
    - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
    - iii)每个导体i的电势$\phi_i$

则V'内的电场唯一确定

- 第二类问题的唯一性定理
    - i)V'(介质)内给定$\rho$
    - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
    - iii)每个导体上的电荷量$Q_i$

## 二、有导体存在时的唯一性定理

- 第一类问题的唯一性定理
  - i)V'(介质)内给定$\rho$
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体i的电势$\phi_i$

则V'内的电场唯一确定

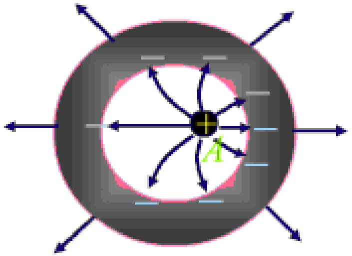
- 第二类问题的唯一性定理
  - i)V'(介质)内给定$\rho$
  - ii)给定边界S上的$\phi/_s$或者$\frac{\partial\phi}{\partial n}/_s$
  - iii)每个导体上的电荷量$Q_i$

则V'内的电场唯一确定

# 二、有导体存在时的唯一性定理

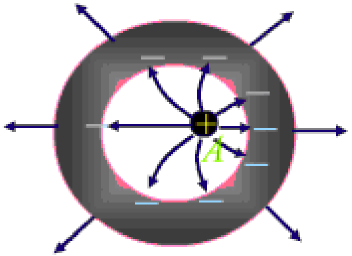
## 二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。



# 二、有导体存在时的唯一性定理

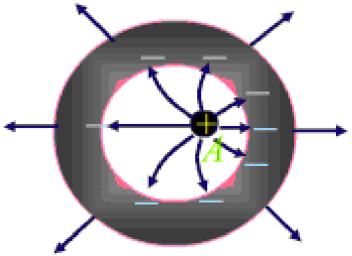
例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。




分析：壳外电势满足

## 二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

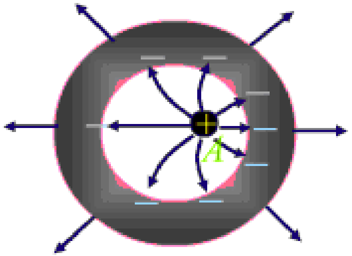


分析：壳外电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \\ \\ \end{cases}$$

# 二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

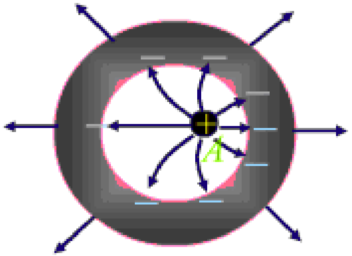


分析：壳外电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \phi/s = \phi_0 \\ \end{cases}$$

# 二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

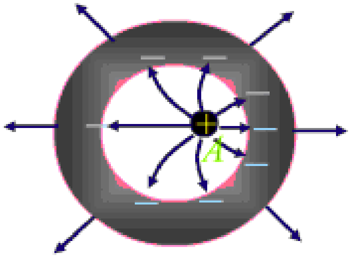



分析：壳外电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \\ \phi/_s = \phi_0 \\ \phi_i = 0 \end{cases}$$

# 二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。

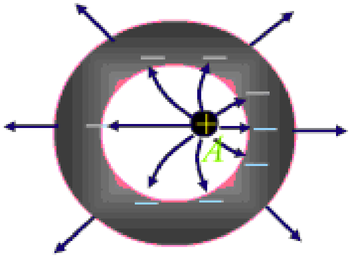



分析：壳外电势满足

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \\ \phi/_s = \phi_0 \\ \phi_i = 0 \end{cases} \tag{14}$$

# 二、有导体存在时的唯一性定理

例一、利用唯一性定理分析导体壳外的电场与壳内电荷的位置关系。




分析：壳外电势满足

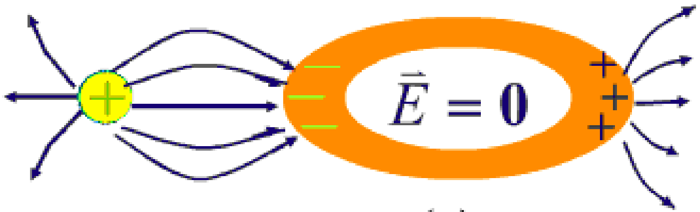
$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 \\ \phi/_s = \phi_0 \\ \phi_i = 0 \end{cases} \tag{14}$$

不论壳内电荷位置如何变化，上述边界条件不变，故壳外电场与电荷在壳内的位置无关。

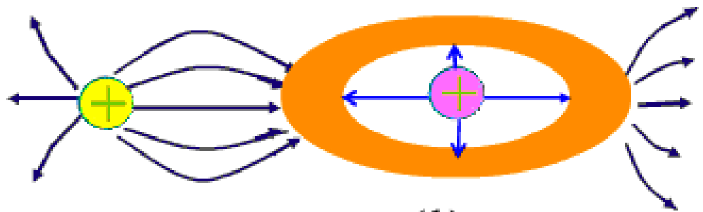
# 二、有导体存在时的唯一性定理

# 二、有导体存在时的唯一性定理

如果壳外有带电体存在，分析壳内无电荷（a）与壳内有电荷（b）时外部电场的异同



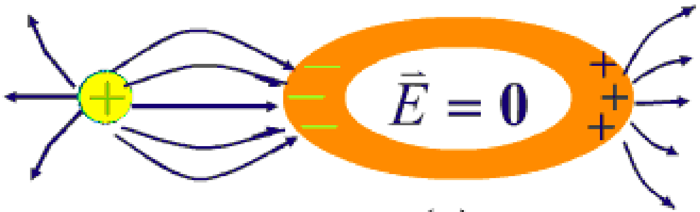

(a)



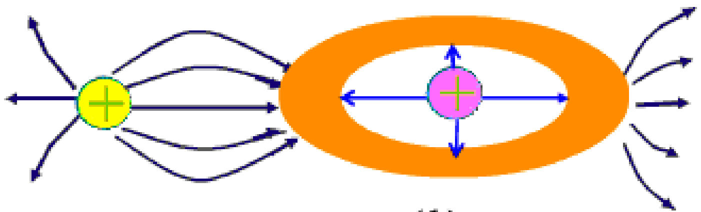
(b)

# 二、有导体存在时的唯一性定理

如果壳外有带电体存在，分析壳内无电荷（a）与壳内有电荷（b）时外部电场的异同




(a)



(b)

两种情形壳外电场相同，原因是壳外的电荷分布以及边界条件相同。