磁标势(Magnetic scalar potential)

马孟森

山西大同大学物理与电子科学学院

2013.10.29

teaching objectives

teaching objectives

1. 引入磁标势的条件;

teaching objectives

1. 引入磁标势的条件;
2. 磁标势满足的方程;

teaching objectives

1. 引入磁标势的条件;
2. 磁标势满足的方程;
3. 静电场与静磁场方程的比较;

teaching objectives

1. 引入磁标势的条件;
2. 磁标势满足的方程;
3. 静电场与静磁场方程的比较;
4. 应用举例;

teaching objectives

1. 引入磁标势的条件;
2. 磁标势满足的方程;
3. 静电场与静磁场方程的比较;
4. 应用举例;

1.引入磁标势的条件

引入区域中任何回路都不能与电流相链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域。

引入区域中任何回路都不能与电流相链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

引入区域中任何回路都不能与电流相链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

notes:

- 1.在有电流的区域必须根据情况挖去一部分区域;

引入区域中任何回路都不能与电流相链环，即该区域是没有自由电流分布的单连通区域。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

notes:

- 1.在有电流的区域必须根据情况挖去一部分区域;
- 2.若空间仅有永久磁铁，则可在全空间引入。

2.磁标势满足的方程

若能引入磁标势，则磁场满足:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = f(\vec{H}) \end{cases}$$

若能引入磁标势，则磁场满足:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = f(\vec{H}) \end{cases}$$

引入磁标势 φ_m, 满足 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$,

若能引入磁标势，则磁场满足:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = f(\vec{H}) \end{cases}$$

引入磁标势 φ_m, 满足 $\vec{H} = -\nabla \varphi_m$,得到

$$\nabla^2 \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0}$$

其中 $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}$

边值关系:

边值关系:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \Rightarrow \varphi_{m1}\big|_S = \varphi_{m2}\big|_S$$

边值关系:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \Rightarrow \varphi_{m1}|_S = \varphi_{m2}|_S$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \Rightarrow \mu_1(\frac{\partial \varphi_{1m}}{\partial n})|_S = \mu_2(\frac{\partial \varphi_{2m}}{\partial n})|_S$$

3.静电场与静磁场方程的比较

静电场

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_P}{\varepsilon_0} \\ \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi \\ \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f + \rho_P}{\varepsilon_0} (= \frac{\rho_f}{\varepsilon}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}) \end{cases}$$

静磁场

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0} \\ \rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ \vec{H} = -\nabla \phi_m \\ \nabla^2 \phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu_0} \end{cases}$$

求磁化矢量为M_0的均匀磁化铁球产生的磁场。
解：铁球内和铁球外两均匀区域。在铁球外没有磁荷。在铁球内由于均匀磁化，则有$\vec{M} = \vec{M}_0$,
$\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0 = 0$,

求磁化矢量为M_0的均匀磁化铁球产生的磁场。
解：铁球内和铁球外两均匀区域。在铁球外没有磁荷。在铁球内由于均匀磁化，则有$\vec{M}=\vec{M}_0$,
$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}_0=0$,
故此，磁荷只分布在球面上。取求外磁标势φ_1,球内磁标势φ_2,则

求磁化矢量为M_0的均匀磁化铁球产生的磁场。
解：铁球内和铁球外两均匀区域。在铁球外没有磁荷。在铁球内由于均匀磁化，则有$\vec{M} = \vec{M}_0$, $\rho_m = -\mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{M}_0 = 0$,
故此，磁荷只分布在球面上。取求外磁标势φ_1,球内磁标势φ_2,则

$$\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \phi_2 = 0.$$

由于$r \to \infty$, φ_1需有限，可知

$$\varphi_1 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

由于$r \to \infty$, φ_1需有限，可知

$$\varphi_1 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

当$r \to 0$, φ_2需有限，则

$$\varphi_2 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta).$$

由于$r \to \infty$, φ_1需有限，可知

$$\varphi_1 = \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

当$r \to 0$, φ_2需有限，则

$$\varphi_2 = \sum_n a_n R^n P_n(\cos\theta).$$

而球面边界条件为

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \vec{n} \cdot \left(\vec{M}_1 - \vec{M}_2\right) = -\vec{M}_0 \cos\theta$$

4.应用举例

$$\sum_n \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta) = -\sum_n n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta)$$
$$+M_0 P_1 \cos\theta),$$

$$\sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_n n a_n R_0^n P_n(\cos\theta)$$

$$\sum_n \frac{(n+1)b_n}{R_0^{n+2}} P_n(\cos\theta) = -\sum_n n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta)$$
$$+M_0 P_1 \cos\theta),$$

$$\sum_n \frac{b_n}{R_0^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_n n a_n R_0^n P_n(\cos\theta)$$

比较$P(n)$系数可得:

$$a_1 = \tfrac{1}{3} M_0,\ b_1 = \tfrac{1}{3} M_0 R_0^3.$$
$$a_n = b_n = 0, n \neq 1.$$

故此，

$$\varphi_1 = \frac{M_0 R_0^3}{3}\frac{\cos\theta}{R^2} = \frac{R_0^3}{3}\frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3},$$

故此，

$$\varphi_1 = \frac{M_0 R_0^3}{3} \frac{\cos\theta}{R^2} = \frac{R_0^3}{3} \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3} M_0 R \cos\theta = \frac{1}{3} \vec{M}_0 \cdot \vec{R}.$$

故此，

$$\varphi_1 = \frac{M_0 R_0^3}{3}\frac{\cos\theta}{R^2} = \frac{R_0^3}{3}\frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{R^3},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{3} M_0 R \cos\theta = \frac{1}{3}\vec{M}_0 \cdot \vec{R}.$$

球内磁场为： $\vec{H} = -\nabla\varphi_2 = -\frac{1}{3}\vec{M}_0,$
$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}_0) = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}_0.$