磁多极矩

马孟森

山西大同大学物理与电子科学学院

2013.11.1

teaching objectives

teaching objectives

1. 矢势的多极展开;

teaching objectives

1. 矢势的多极展开;
2. 磁偶极矩的场和磁标势;

teaching objectives

1. 矢势的多极展开;
2. 磁偶极矩的场和磁标势;
3. 小区域内电流分布在外磁场中的能量;

teaching objectives

1. 矢势的多极展开;
2. 磁偶极矩的场和磁标势;
3. 小区域内电流分布在外磁场中的能量;

1.矢势的多极展开

给定区域电流分布，矢势为:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')dV'}{r}$$

给定区域电流分布，矢势为:

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')dV'}{r}$$

当电流分布区域的线度远小于该区域到场点的距离，$\vec{A}$ 可多极展开。

给定区域电流分布，矢势为:

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')dV'}{r}$$

当电流分布区域的线度远小于该区域到场点的距离，$\vec{A}$ 可多极展开。因为

$$f(\vec{x}-\vec{x}')=f(\vec{x})+(\vec{x}'\cdot\nabla')f(\vec{x})+\frac{1}{2}(\vec{x}'\cdot\nabla')^2f(\vec{x})+\cdots$$

给定区域电流分布，矢势为:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')dV'}{r}$$

当电流分布区域的线度远小于该区域到场点的距离，$\vec{A}$ 可多极展开。因为

$$f(\vec{x}-\vec{x}') = f(\vec{x}) + (\vec{x}'\cdot\nabla')f(\vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{x}'\cdot\nabla')^2 f(\vec{x}) + \cdots$$

且

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

所以

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + (\vec{x}' \cdot \nabla')\frac{1}{r}\bigg|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla')^2\frac{1}{r}\bigg|_{\vec{x}'=0} + \cdots$$

所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{1}{R} + (\vec{x}' \cdot \nabla')\frac{1}{r}\bigg|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla')^2\frac{1}{r}\bigg|_{\vec{x}'=0} + \cdots \\
&= \frac{1}{R} - (\vec{x}' \cdot \nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla)^2\frac{1}{R} + \cdots
\end{aligned}
$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{R} + (\vec{x}' \cdot \nabla')\frac{1}{r}\Big|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla')^2\frac{1}{r}\Big|_{\vec{x}'=0} + \cdots \\ &= \frac{1}{R} - (\vec{x}' \cdot \nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla)^2\frac{1}{R} + \cdots \\ &= \frac{1}{R} - (\vec{x}' \cdot \nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2}(\vec{x}'\vec{x}' : \nabla\nabla)\frac{1}{R} + \cdots\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + (\vec{x}' \cdot \nabla')\frac{1}{r}\Big|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla')^2\frac{1}{r}\Big|_{\vec{x}'=0} + \cdots$$
$$= \frac{1}{R} - (\vec{x}' \cdot \nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla)^2\frac{1}{R} + \cdots$$
$$= \frac{1}{R} - (\vec{x}' \cdot \nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2}(\vec{x}'\vec{x}' : \nabla\nabla)\frac{1}{R} + \cdots$$

So

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \vec{J}(\vec{x}')[\tfrac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla\tfrac{1}{R}$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{R} + \cdots]dV'$$

其中，

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'$$

其中，

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'$$

对于线电流，有

其中，

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'$$

对于线电流，有

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\oint_L d\vec{l}' = 0$$

其中，

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'$$

对于线电流，有

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\oint_L d\vec{l}' = 0$$

原因：无磁荷(磁单极子)存在

第二项

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{x}')\vec{x}' \cdot \nabla\frac{1}{R}dV'$$

考虑到

$\int \vec{J}(\vec{x}')dV' = \oint Idl,\ d\vec{x}' = d\vec{l}',$

第二项

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}dV'$$

考虑到

$\int\vec{J}(\vec{x}')dV'=\oint Idl,\ d\vec{x}'=d\vec{l}'$,以及

$\oint(\vec{x}'\cdot\vec{R})d\vec{l}'=\frac{1}{2}\oint(\vec{x}'\times d\vec{l}')\times\vec{R}$,

第二项

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{x}')\vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} dV'$$

考虑到

$\int \vec{J}(\vec{x}')dV' = \oint Idl,\ d\vec{x}' = d\vec{l}'$,以及

$\oint (\vec{x}' \cdot \vec{R})d\vec{l}' = \frac{1}{2}\oint (\vec{x}' \times d\vec{l}') \times \vec{R}$, 得到

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

第二项

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{x}')\vec{x}' \cdot \nabla \frac{1}{R} dV'$$

考虑到

$\int \vec{J}(\vec{x}')dV' = \oint I dl, \; d\vec{x}' = d\vec{l}'$,以及

$\oint (\vec{x}' \cdot \vec{R}) d\vec{l}' = \frac{1}{2}\oint (\vec{x}' \times d\vec{l}') \times \vec{R}$, 得到

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{R}}{R^3}$$

其中， $\vec{m} = I\vec{S} = \frac{I}{2}\oint_L \vec{x}' \times d\vec{l}'$

$$\vec{B}^{(1)} = \nabla \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla \times (\vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3})$$

当 $R \neq 0$,

$$\nabla \times (\vec{m} \times \frac{\vec{R}}{R^3}) = -\nabla(\vec{m} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3})$$

因此,

$$\vec{B}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla(\vec{m} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3})$$

此外,

$$\vec{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \varphi_m \Rightarrow \varphi_m = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3}$$

3.小区域内电流分布在外磁场中的能量

外磁场B_e的矢势为A_e, 则$J(x)$ 在外磁场中的相互作用能量为:

外磁场B_e的矢势为A_e, 则$J(x)$ 在外磁场中的相互作用能量为:

$$W = \int \vec{J} \cdot \vec{A}_e \mathrm{dV}$$

3.小区域内电流分布在外磁场中的能量

外磁场B_e的矢势为A_e, 则$J(x)$ 在外磁场中的相互作用能量为:

$$W = \int \vec{J} \cdot \vec{A}_e \mathrm{dV}$$

载流线圈在外磁场中的能量:

$$W = I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = I \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S} = I\Phi_e$$

3.小区域内电流分布在外磁场中的能量

外磁场B_e的矢势为A_e, 则$J(x)$ 在外磁场中的相互作用能量为:

$$W = \int \vec{J} \cdot \vec{A}_e \mathrm{dV}$$

载流线圈在外磁场中的能量:

$$W = I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = I \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S} = I\Phi_e$$

若区域线度远小于磁场发生显著变化的线度，则

$$\vec{B}_e(x) = \vec{B}_e(0) + \vec{x} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \cdots$$

外磁场B_e的矢势为A_e, 则$J(x)$ 在外磁场中的相互作用能量为:

$$W = \int \vec{J} \cdot \vec{A}_e \mathrm{dV}$$

载流线圈在外磁场中的能量:

$$W = I \oint_L \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = I \int_S \vec{B}_e \cdot d\vec{S} = I\Phi_e$$

若区域线度远小于磁场发生显著变化的线度，则

$$\vec{B}_e(x) = \vec{B}_e(0) + \vec{x} \cdot \nabla \vec{B}_e(0) + \cdots$$

由此得到， $W \approx \vec{m} \cdot \vec{B}_e(0)$