电多极矩
Electric Multipole Moment

刘艳红
山西大同大学物理与电子科学学院

October 21,2013

处理本节问题的特点

处理本节问题的特点

电荷分布在小区域内，而场点又距离电荷分布较远，即$l \gg r$

实例:

1. 原子核中电荷（质子）分布的限度$\sim 10^{-13} cm \sim 10^{-15} Fm$

处理本节问题的特点

电荷分布在小区域内，而场点又距离电荷分布较远，即$l \gg r$

实例:

1. 原子核中电荷（质子）分布的限度$\sim 10^{-13}cm \sim 10^{-15}Fm$
2. 电子到原子核的平均距离$\sim 10^{-10}m$

处理本节问题的特点

电荷分布在小区域内，而场点又距离电荷分布较远，即$l \gg r$

实例:

1. 原子核中电荷（质子）分布的限度$\sim 10^{-13}cm \sim 10^{-15}Fm$
2. 电子到原子核的平均距离$\sim 10^{-10}m$
3. 原子核中的电荷所激发的作用在电子上的电势就可以用点多极矩表示

处理本节问题的特点

电荷分布在小区域内，而场点又距离电荷分布较远，即$l \gg r$

实例：

1. 原子核中电荷（质子）分布的限度$\sim 10^{-13} cm \sim 10^{-15} Fm$
2. 电子到原子核的平均距离$\sim 10^{-10} m$
3. 原子核中的电荷所激发的作用在电子上的电势就可以用点多极矩表示

研究内容

研究内容

1. 电势的多极展开

研究内容

1. 电势的多极展开
2. 电多极矩

研究内容

1. 电势的多极展开
2. 电多极矩
3. 电荷体系在外电场中的能量(相互作用能)

研究内容

1. 电势的多极展开
2. 电多极矩
3. 电荷体系在外电场中的能量(相互作用能)

一、电势的多极展开

一、电势的多极展开

1. 1. 小区域电荷分布

一、电势的多极展开

1. **1. 小区域电荷分布**

若已知$\rho(\vec{x}')$，原则上可通过:

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\infty} \frac{\rho(\vec{x}')dV'}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (1)$$

一、电势的多极展开

1. 1. 小区域电荷分布

若已知$\rho(\vec{x}')$，原则上可通过:

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\infty} \frac{\rho(\vec{x}')dV'}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (1)$$

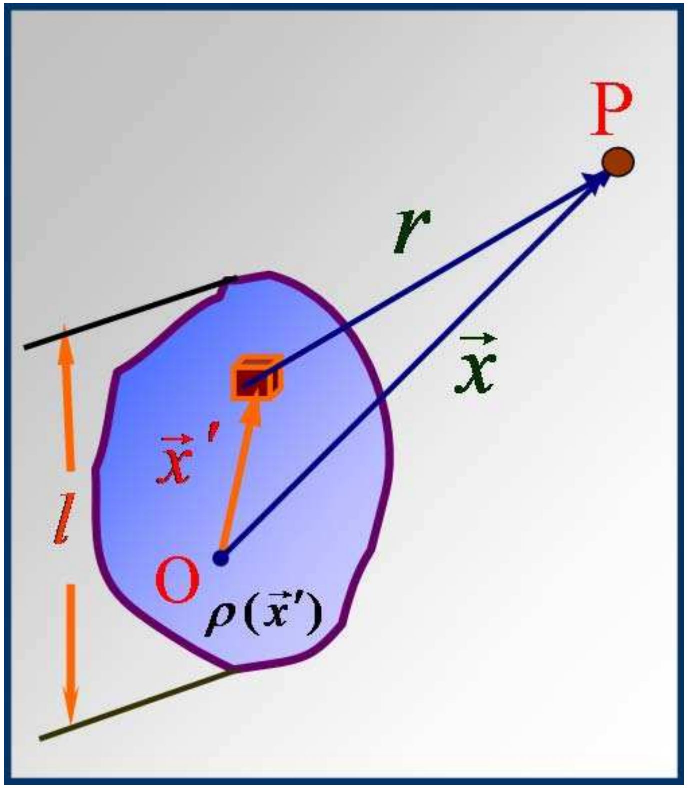
求电势。

一般若体电荷分布不均匀或区域不规则，积分十分困难（用计算机可数值求解）。

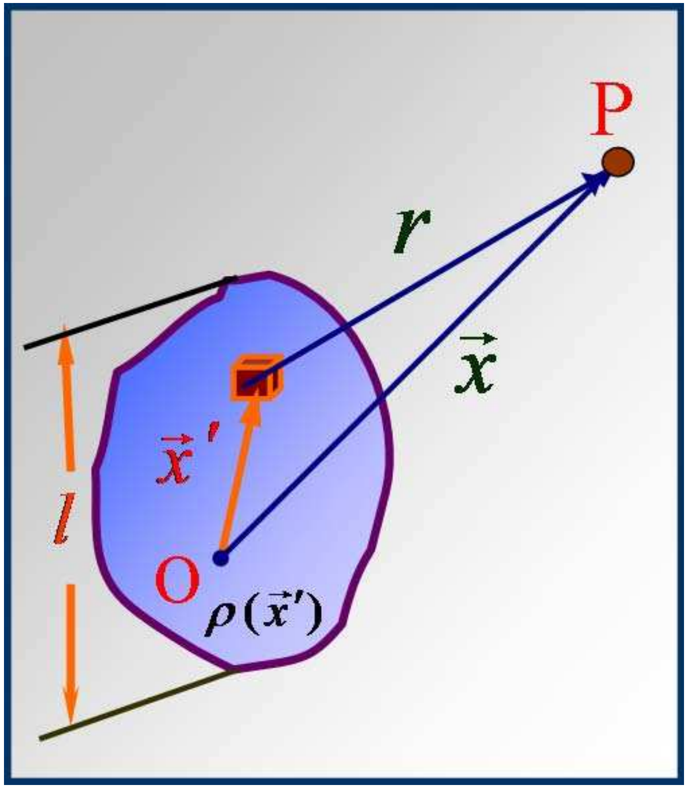
一、电势的多极展开

一、电势的多极展开

一、电势的多极展开



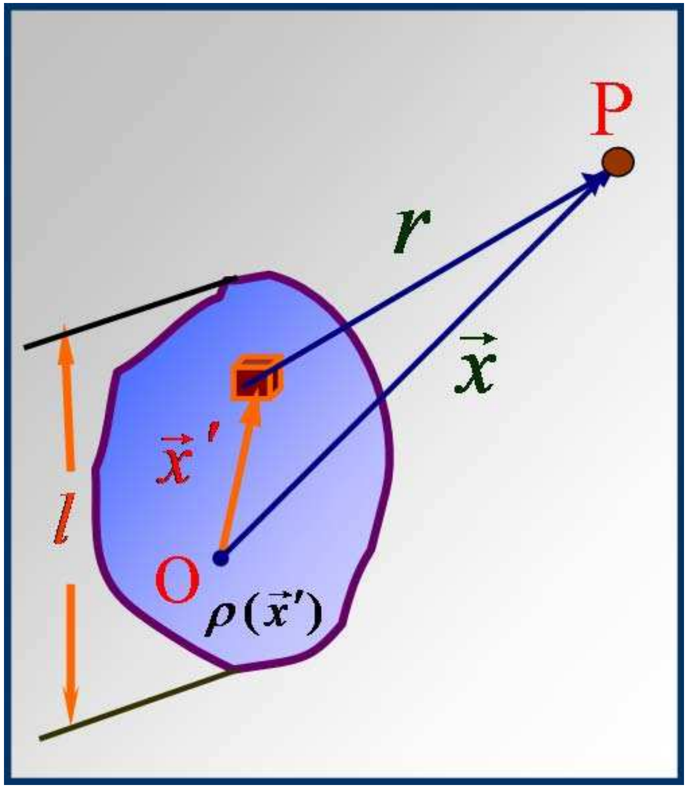
一、电势的多极展开



但是在许多实际情况中，电荷分布区域的线度远小于该区域到场点的距离，可以近似处理，解析求解。条件$l \gg r$

$$r \approx R \Rightarrow \phi(\vec{x}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad (2)$$

一、电势的多极展开



但是在许多实际情况中，电荷分布区域的线度远小于该区域到场点的距离，可以近似处理，解析求解。条件$l \gg r$

$$r \approx R \Rightarrow \phi(\vec{x}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad (2)$$

一、电势的多极展开

一、电势的多极展开

2、1/r麦克劳林展开　　(1) 一元函数的麦克劳林展开式（在坐标原点展开）

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}\frac{df(0)}{dx}x + \frac{1}{2!}\frac{df^2(0)}{dx^2}x^2 + \cdots \quad (3)$$

一、电势的多极展开

2、1/r麦克劳林展开　　(1) 一元函数的麦克劳林展开式（在坐标原点展开）

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}\frac{df(0)}{dx}x + \frac{1}{2!}\frac{df^2(0)}{dx^2}x^2 + \cdots \quad (3)$$

一、电势的多极展开

一、电势的多极展开

(2) 三元函数的麦克劳林展开

(2) 三元函数的麦克劳林展开

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= f(x_1, x_2, x_3) = f(0,0,0) \qquad (4)\\
&+ \frac{1}{1!}\left(x_1\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_3}\right)\\
&+ \frac{1}{2!}\left[x_1^2\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1} + x_2^2\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_2} + x_3^2\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_3}\right.\\
&\left.+ 2x_1x_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + 2x_1x_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3} + 2x_2x_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

一、电势的多极展开

(2) 三元函数的麦克劳林展开

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= f(x_1, x_2, x_3) = f(0,0,0) \qquad (4) \\
&+ \frac{1}{1!}\left(x_1\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x_3}\right) \\
&+ \frac{1}{2!}\left[x_1^2\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_1} + x_2^2\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_2} + x_3^2\frac{\partial^2 f(0,0,0)}{\partial x_3}\right. \\
&\left. + 2x_1x_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + 2x_1x_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3} + 2x_2x_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

一、电势的多极展开

一、电势的多极展开

麦克劳林展开:

$$
\begin{aligned}
f(\ \vec{x}\ ) &= f(0) + \frac{1}{1!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)f(0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 f(0) + \cdots \\
&= f(0) + \sum_{i=1}^{3} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(0) + \frac{1}{2}\sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) + \\
&= f(0) + (\vec{x}\cdot\nabla)f(0) + \frac{1}{2}(\vec{x}\cdot\nabla)^2 f(0) + \cdots \qquad (5)
\end{aligned}
$$

一、电势的多极展开

麦克劳林展开:

$$
\begin{aligned}
f(\ \vec{x}\ ) &= f(0) + \frac{1}{1!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) f(0) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 f(0) + \cdots \\
&= f(0) + \sum_{i=1}^{3} x_i\frac{\partial}{\partial x_i} f(0) + \frac{1}{2}\sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) + \\
&= f(0) + (\vec{x}\cdot\nabla) f(0) + \frac{1}{2}(\vec{x}\cdot\nabla)^2 f(0) + \cdots \qquad (5)
\end{aligned}
$$

一、电势的多极展开

一、电势的多极展开

(3) 将$1/r$在$\vec{x}' = 0$点展开

一、电势的多极展开

(3) 将1/r在$\vec{x}' = 0$点展开

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|} = f(\vec{x} - \vec{x}'),\ \vec{x}' = 0,\ \tfrac{1}{r} = \tfrac{1}{R}$$

$$f(\vec{x} - \vec{x}') = f(\vec{x}) + (\vec{x}' \cdot \nabla')f(\vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla')^2 f(\vec{x}) + \cdots$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + (\vec{x}' \cdot \nabla')\left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla')^2 \left.\frac{1}{r}\right|_{\vec{x}'=0} + \cdots$$

$$= \frac{1}{R} - (\vec{x}' \cdot \nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2}(\vec{x}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{R} + \cdots$$

一、电势的多极展开

一、电势的多极展开

$$= \frac{1}{R} - (\vec{x}' \cdot \nabla)\frac{1}{R} + \frac{1}{2}(\vec{x}'\vec{x}' : \nabla\nabla)\frac{1}{R} + \cdots$$

其中

$$(\nabla' \frac{1}{r}\bigg|_{\vec{x}'=0} = -\nabla \frac{1}{r}\bigg|_{\vec{x}'=0} = -\nabla\frac{1}{R},$$

$$\vec{a}\vec{a} : \vec{b}\vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2)$$

一、电势的多极展开

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x}')[\frac{1}{R} - \vec{x}' \cdot \nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\vec{x}'\vec{x}' : \nabla\nabla\frac{1}{R} + \cdots]dV'$$

3、小区域电荷分布产生的电势

$$\varphi(\vec{x}) = \int_\infty \frac{\rho(\vec{x}')dV'}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

而:

$$Q = \int_V \rho(\vec{x}')dV'$$

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{x}')\vec{x}'dV'$$

一、电势的多极展开

一、电势的多极展开

$$\overleftrightarrow{D} = \int_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')dV'$$

上式为电四极张量

$$D_{ij} = \int 3x_i'x_j'\rho(\vec{x}')dr \quad i = 1-3, j = 1-3$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{D} : \nabla\nabla\frac{1}{R} + \cdots$$

$$= \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots$$

二、电多极矩

二、电多极矩

1、展开式的物理意义

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

等效于坐标原点点电荷产生的电势。因此小电荷体系在电荷分布区外产生的电势在零级近似下可视为将电荷集中于原点处产生的电势。

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{R} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot(-\frac{\vec{R}}{R^3}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

等效电偶极矩$\vec{p}$ 产生的电势。最简单的体系为两个点电荷产生的电势。

二、电多极矩

二、电多极矩

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overset{\leftrightarrow}{D} : \nabla\nabla\frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{ij} D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{R}$$

$$\begin{aligned}\overset{\leftrightarrow}{D} : \nabla\nabla &= \sum_{ij} D_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j : \sum_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\vec{e}_k\vec{e}_l \\ &= \sum_{ij} D_{ij}\sum_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\delta_{jk}\delta_{il} = \sum_{ij} D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\end{aligned}$$

$\phi^{(2)}$等效为体系电四极矩张量产生的电势。最简单的体系为坐标原点附近（＋，-，＋，-）四个点电荷产生的电势

二、电多极矩

2、电四极矩张量

$$\overleftrightarrow{D} = \int_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')dV'$$

有9个分量

$$D_{ij} = \int 3x_i'x_j'\rho(\vec{x}')dV'$$

由于$D_{ij} = D_{ji}$所以电四极矩有六个不同的分量。重新定义：

$$\overleftrightarrow{D} = \int (3\vec{x}'\vec{x}' - R'^2\overleftrightarrow{I})\rho(\vec{x}')dV'$$

二、电多极矩

二、电多极矩

它不改变$\phi^{(2)}$ $D_{11}+D_{22}+D_{33}=0$只有5个独立分量,证明:

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\left[\int 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')dV'\right]:\nabla\nabla\frac{1}{R}$$

$$=\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{1}{6}\left[\int 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')dV':\nabla\nabla\tfrac{1}{R}-\int R'^2\overleftrightarrow{I}:\nabla\nabla\tfrac{1}{R}\rho(\vec{x}')dV'\right]$$

$$=\tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tfrac{1}{6}\left[\int(3\vec{x}'\vec{x}'-R'^2\overleftrightarrow{I})\rho(\vec{x}')dV'\right]:\nabla\nabla\tfrac{1}{R}$$

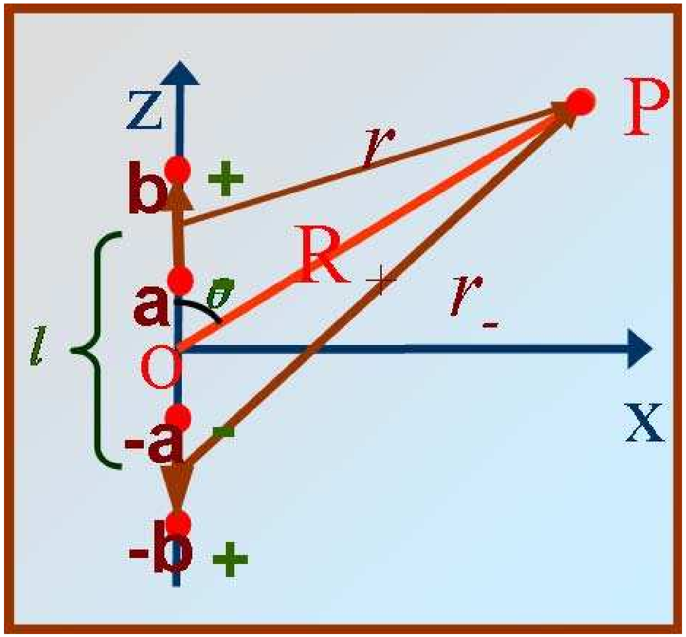
电四极矩最简单体系举例:

电四极矩最简单体系举例:

四个点电荷在一直线上按（＋，-，-，＋）排列，可看作一对正负电偶极子。

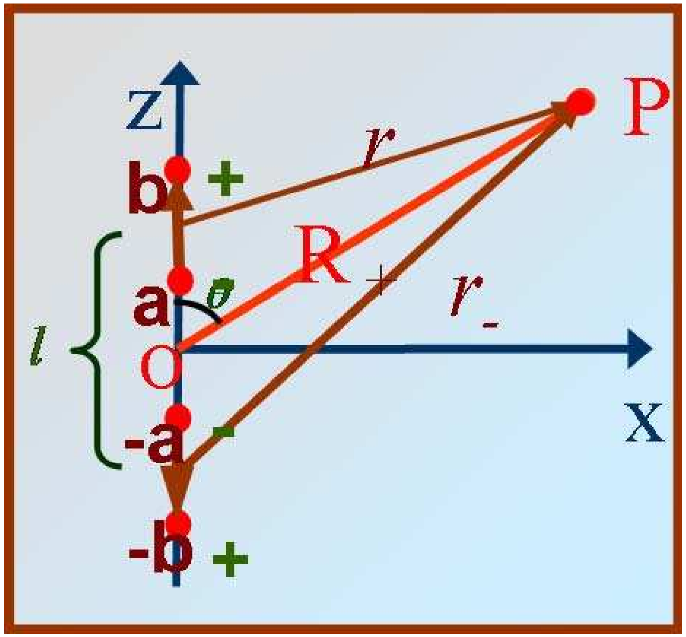
电四极矩最简单体系举例:

四个点电荷在一直线上按（＋，-，-，＋）排列，可看作一对正负电偶极子。



电四极矩最简单体系举例:

四个点电荷在一直线上按（+，-，-，+）排列，可看作一对正负电偶极子。



$$l = a + b$$

$$\vec{P}_{=}Q(b-a)\vec{e}_z = \vec{p}$$

$$\vec{P}_{=}-Q(b-a)\vec{e}_z = -\vec{p}$$

体系总电荷、总电偶极矩为零,依定义$D_{33} \neq 0$
其它分量均为零.

电四极矩最简单体系举例:

电四极矩最简单体系举例:

$$\begin{aligned} D_{33} &= \int_V 3zz\rho(\vec{x})dV = \int_{z=-\infty}^{z=\infty} 3zzQ'\delta(z-z')dz \\ &= 3z_1z_1Q - 3z_2z_2Q - 3z_3z_3Q + 3z_4z_4Q \\ &= 3(b^2-a^2-a^2+b^2)Q = 6Q(b^2-a^2) \\ &= 6Q(b-a)(b+a) = 6pl \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\cdot 6pl\vec{e}_z\vec{e}_z : \nabla\nabla\frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}pl\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{R})$$

它与直接计算结果完全一致（$l \ll R$)

$$\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot[\nabla\frac{1}{r_+} - \nabla\frac{1}{r_-}]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}) \ (\vec{p} = p\vec{e}_z)$$

电四极矩最简单体系举例:

电四极矩最简单体系举例:

$$r_+ \approx R - \frac{l}{2}\cos\theta \quad r_- \approx R + \tfrac{l}{2}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx \frac{l\cos\theta}{R^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{1}{R^2}\frac{z}{R}$$

$$= -\frac{\cos\theta}{R^2} \quad (z = R\cos\theta)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} pl \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\frac{1}{R})$$

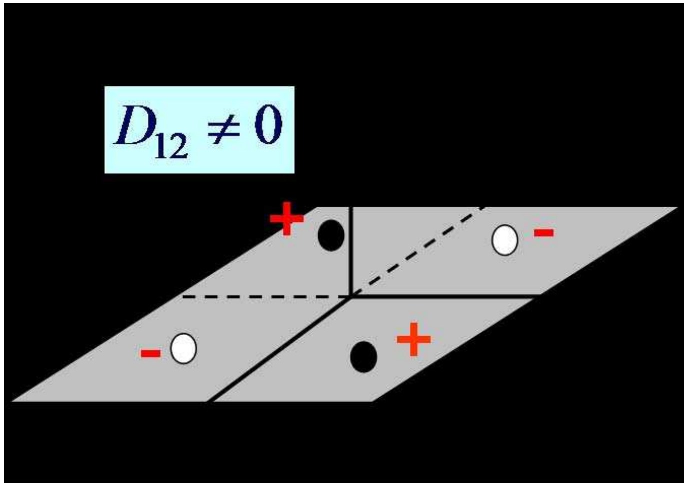
电四极矩最简单体系举例:

电四极矩最简单体系举例:

电四极矩其它例子:

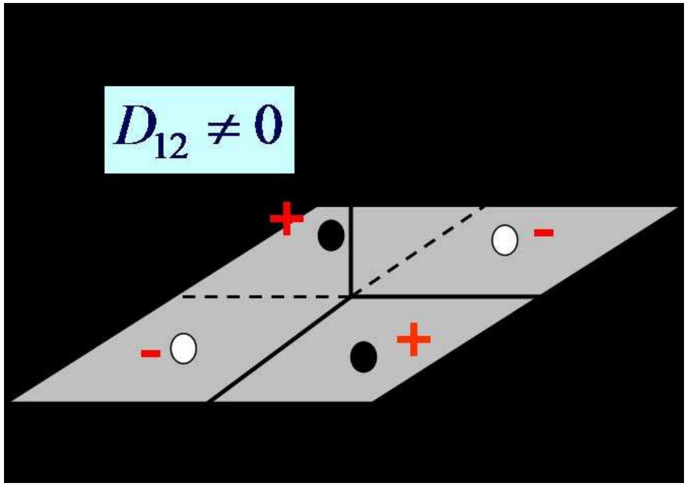
电四极矩最简单体系举例:

电四极矩其它例子:



电四极矩最简单体系举例:

电四极矩其它例子:



$D_{11} \neq 0$四个点电荷在 x 轴

$D_{22} \neq 0$四个点电荷在y 轴

$D_{12} = D_{21} \neq 0$ x-y平面

$D_{13} = D_{31} \neq 0$ x-z平面

$D_{23} = D_{32} \neq 0$ y-z平面

作业: 计算图示情况下的电四极矩张量