

文章编号: 1000-4750(2016)03-0169-10

桩基-流体饱和土体耦合系统的动态响应分析

朱媛媛¹, 胡育佳², 仲 政³, 程昌钧⁴

(1. 上海师范大学计算机科学与技术系, 上海 200234; 2. 上海理工大学机械工程学院, 上海 200093;

3. 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092; 4. 上海大学力学系, 上海 200444)

摘 要: 该文研究了空间轴对称桩基-流体饱和土体耦合系统的动态响应。首先, 基于弹性力学和多孔介质理论给出了耦合系统的控制微分方程、边界条件和桩-土之间界面上的连接条件; 其次, 发展了微分求积单元法; 在此基础上采用所发展的方法和2阶向后差分格式在空间和时间域内离散了控制微分方程; 最后, 利用Newton-Raphson迭代方法在初始条件下求得了系统的数值解, 分析了耦合系统的动态响应, 考察了参数的影响, 也验证了数值方法的有效性。

关键词: 空间轴对称桩基-流体饱和土体耦合系统; 多孔介质理论(PMT); 微分求积单元法(DQEM); 代数-微分方程; 动态响应

中图分类号: TU435 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.08.0694

DYNAMIC RESPONSE OF A PILE-FLUID-SATURATED-SOIL COUPLED SYSTEM

ZHU Yuan-yuan¹, HU Yu-jia², ZHONG Zheng³, CHENG Chang-jun⁴

(1. Department of Computer Science and Technology, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China;

2. College of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

3. School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;

4. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: The dynamic response of a space-axisymmetrical pile-fluid-saturated soil coupled system is studied. Firstly, based on the theory of elasticity and the Porous Media theory, the governing differential equations for the coupled system are presented. Then, the differential quadrature element method is developed. After that, the developed differential quadrature element method and the second-order backward difference scheme are applied to discretize the governing differential equations of the coupled system on spatial and temporal domains, respectively. Finally, the Newton-Raphson iteration method is used to derive the numerical solutions of the system with initial conditions, the dynamic response of the system and the effect of parameters are studied, and the validity of the analysis method is verified.

Key words: space-axisymmetrical pile-fluid-saturated soil coupled system; porous media theory (PMT); differential quadrature element method (DQEM); algebraic differential equations; dynamic response

收稿日期: 2014-08-11; 修改日期: 2015-03-16

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(11232009); 上海市自然科学基金项目(15ZR1431600)

通讯作者: 朱媛媛(1971-), 女, 上海人, 副教授, 博士, 主要从事结构的非线性理论、方法和应用研究(E-mail: yuanyuan_zhu@hotmail.com).

作者简介: 胡育佳(1979-), 男, 江西人, 副教授, 博士, 主要从事结构多场耦合分析研究(E-mail: huyujia@126.com);

仲 政(1964-), 男, 福建人, 教授, 博士, 博导, 主要从事工程力学研究(E-mail: zhongk@tongji.edu.cn);

程昌钧(1937-), 女, 重庆人, 教授, 学士, 博导, 主要从事固体力学研究(E-mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn).

不论是传统应用领域还是近代新兴科学技术,多孔介质理论均具有广泛的应用,如土力学、水文学、石油和天然气开发过程中的流固耦合问题、生物学中皮肤、软组织和关节软骨的力学特性、环境工程中污染物在土介质中的迁移问题等等。因而,发展相关的理论和数值计算方法是非常重要的^[1]。

已有一些理论来描述多孔介质的特性,例如 Boit 理论,多孔介质理论和杂交混和物理论等。2005 年,Boer^[2]基于连续介质混和物公理和体积分数的概念建立了完整的多孔弹性理论。该理论通过体积分数的概念,直接用若干微观性质来描述宏观性质,避免了杂交混和物理论中的繁杂公式,并在数学模型中比较容易地反映诸如动力特性、材料和几何非线性等效效应。这样,Boer 模型提供了研究流体饱和和介质特性的另一种途径。

基于 Biot 理论, Apirathvorakij 和 Karasudhi^[3]分析了饱和土中桩基侧向变形的初始和终极状态。Zeng 和 Rajapakse^[4]利用边界积分方程在频率域研究了饱和土中垂直受载单桩的稳态动力响应,得到了半空间问题的半解析解。Jin 和 Zhou 等^[5]研究了饱和土中单桩的频率响应。Zhou 和 Wang 等^[6]利用 Fredholm 积分方程研究了饱和弹性半空间中桩基受瞬时垂直载荷作用的动态响应。李强和郑辉等^[7]通过势函数分解法和分离变量法求解了饱和土动力固结方程,并利用桩土耦合条件得到摩擦桩竖向振动解。Wang 和 Zhou 等^[8]研究了谐载荷作用下饱和土中群桩的力学特性。Maeso 和 Aznarez 等^[9]提出一个 3D-边界元模型来分析饱和土中单桩和群桩的频率响应。刘林超和杨骁^[10]运用 Novak 薄层法和势函数方法研究了饱和土中桩-桩的竖向动力相互作用及群桩的竖向动力阻抗问题。Liang 和 Song^[11]利用边界元法研究了饱和土中桩-桩相互作用问题。目前,研究饱和土中桩基力学行为时也常采用 Winkler 模型来模拟土体对桩基的反作用,虽然简单,但对于复杂的多孔介质而言,相关物性参数难以确定,并不能完全刻画桩-土间的相互作用,同时也尚未看到相关的实验验证。因此,应该探索新的途径来研究此类问题。本文的目的是放弃 Winkler 模型,把桩基和土体看成一个组合体,采用多孔介质理论和连续介质力学的框架来分析桩基-流体饱和和土耦合系统的动力响应。

本文基于 Boer 多孔介质理论^[2](PMT)来分析空间轴对称桩基-流体饱和和土体耦合系统的动力学响

应,其中,具有等圆截面的弹性桩基被嵌入于轴对称流体饱和和弹性土体中。首先,建立了耦合系统动力学特性分析的控制偏微分方程、边界条件和桩-土之间界面上的连接条件;其次,发展了求解耦合系统的数值方法—微分求积单元法(DQEM)。在此基础上,利用 DQEM 对系统进行空间离散,得到时间域内的一组代数-微分方程,然后利用二阶向后差分格式处理时间导数,离散代数-微分方程并进行了数值求解。为了验证本文方法的正确性和结果的可靠性,将数值结果和现有的解析结果进行了比较。最后,分析了耦合系统的动态响应,考察了孔隙率和载荷等因素的影响。

1 问题的描述

考察由桩基和流体饱和和土体组成的耦合系统,其中具有等圆截面并在顶端受垂直载荷 $q(r,t)$ 作用的桩基被埋入于空间轴对称流体饱和和弹性土中,而土体的表面是自由的。假设桩基和土体所占的空间区域分别为 $\Omega_p(0 \leq r \leq r_p, 0 \leq z \leq H)$ 和 $\Omega_s(r_p \leq r \leq r_\infty, 0 \leq z \leq H)$, 其中, r_p 是桩基的半径, r_∞ 是土体的外半径。这样,系统可以看成是一个由桩基和流体饱和和弹性土体组成的空间轴对称耦合体。图 1 为耦合系统在 rz -平面上的投影。

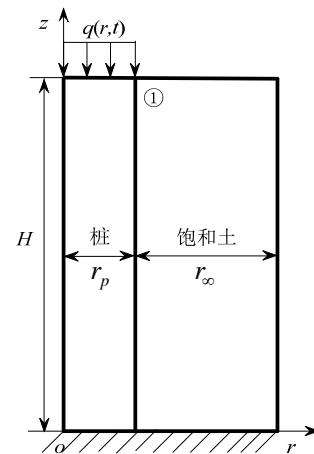


图 1 rz -平面上耦合系统的物理模型

Fig.1 The physical model of coupled system on the rz -plane

1.1 基本控制方程

根据弹性理论,空间轴对称桩基的运动方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r^P}{\partial r} + \frac{\sigma_r^P - \sigma_\theta^P}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}^P}{\partial z} - \rho^P \ddot{u}_r^P = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}^P}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}^P}{r} + \frac{\partial \sigma_z^P}{\partial z} - \rho^P \ddot{u}_z^P = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中:上标 P 表示与桩基有关的量;即 u_r^P 、 u_z^P 分

别为桩基的径向和轴向位移; σ_r^P 、 σ_θ^P 、 σ_z^P 、 τ_{rz}^P 分别为桩基的应力分量; ρ^P 为介质密度。

在小变形的情况下, 应变分量 ε_r^P 、 ε_θ^P 、 ε_z^P 、 ε_{rz}^P 和位移 u_r^P 、 u_z^P 之间有几何关系为:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^P = \frac{\partial u_r^P}{\partial r}, \quad \varepsilon_z^P = \frac{\partial u_z^P}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta^P = \frac{u_r^P}{r}, \\ \varepsilon_{rz}^P = \frac{1}{2}\gamma_{rz}^P = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^P}{\partial z} + \frac{\partial u_z^P}{\partial r}\right) \end{cases} \quad (2)$$

对于各向同性线弹性材料, 桩基的本构关系为:

$$\begin{cases} \sigma_r^P = (2\mu^P + \lambda^P)\varepsilon_r^P + \lambda^P(\varepsilon_\theta^P + \varepsilon_z^P) \\ \sigma_\theta^P = (2\mu^P + \lambda^P)\varepsilon_\theta^P + \lambda^P(\varepsilon_r^P + \varepsilon_z^P) \\ \sigma_z^P = (2\mu^P + \lambda^P)\varepsilon_z^P + \lambda^P(\varepsilon_r^P + \varepsilon_\theta^P) \\ \tau_{rz}^P = \mu^P\gamma_{rz}^P \end{cases} \quad (3)$$

其中, μ^P 、 λ^P 是材料的 Lamé 系数。

基于 Boer 多孔介质理论^[2], 即 PMT, 空间轴对称流体饱和弹性土体的控制方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r^{SE}}{\partial r} + \frac{\sigma_r^{SE} - \sigma_\theta^{SE}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}^{SE}}{\partial z} - n^S \frac{\partial p^S}{\partial r} - \rho^S \ddot{u}_r^S + S_v \ddot{w}_r^S = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}^{SE}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}^{SE}}{r} + \frac{\partial \sigma_z^{SE}}{\partial z} - n^S \frac{\partial p^S}{\partial z} - \rho^S \ddot{u}_z^S + S_v \ddot{w}_z^S = 0 \\ n^F \frac{\partial p^S}{\partial r} + \rho^F (\dot{w}_r^S - \dot{u}_r^S) + S_v \ddot{w}_r^S = 0 \\ n^F \frac{\partial p^S}{\partial z} + \rho^F (\dot{w}_z^S - \dot{u}_z^S) + S_v \ddot{w}_z^S = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\dot{u}_r^S + n^F \dot{w}_r^S)) + \frac{\partial}{\partial z} (\dot{u}_z^S + n^F \dot{w}_z^S) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中: 上标 S 表示与饱和土体有关的量; u_r^S 、 u_z^S 和 w_r^S 、 w_z^S 分别是土骨架(固相)和流相在 r 和 z 方向的位移; $\dot{w}_r^S = \dot{w}_r^S - \dot{u}_r^S$ 、 $\dot{w}_z^S = \dot{w}_z^S - \dot{u}_z^S$ 为流相对于固相的相对速度; p^S 为孔隙压; σ_r^{SE} 、 σ_z^{SE} 、 σ_θ^{SE} 、 τ_{rz}^{SE} 为固相的有效应力分量。另外, ρ^S 、 ρ^F 分别为固相和流相的宏观密度, 并且 $\rho^i = n^i \rho^{iR}$, 其中, ρ^{iR} , $i = S, F$ 是土骨架和流相的实密度, n^i , $i = S, F$ 是相应的体积分。 $S_v = (n^F)^2 \gamma^{FR} / \kappa^F$ 为固相和流相之间的耦合系数, 其中, $\gamma^{FR} = \rho^{FR} |b|$ 是流相的有效比重, κ^F 为 Darcy 渗透系数。

基于 PMT, 饱和土总应力分量 σ_r^S 、 σ_θ^S 、 σ_z^S 、 τ_{rz}^S

与有效应力分量 σ_r^{SE} 、 σ_z^{SE} 、 σ_θ^{SE} 、 τ_{rz}^{SE} 之间有关系:

$$\begin{cases} \sigma_r^S = \sigma_r^{SE} - n^S p^S, \quad \sigma_z^S = \sigma_z^{SE} - n^S p^S \\ \sigma_\theta^S = \sigma_\theta^{SE} - n^S p^S, \quad \tau_{rz}^S = \tau_{rz}^{SE} \end{cases} \quad (5)$$

小变形条件下, 饱和土体固相材料的位移 u_r^S 、 u_z^S 和应变分量 ε_r^S 、 ε_z^S 、 ε_θ^S 、 ε_{rz}^S 之间的几何关系, 以及线弹性固相材料的应变分量与有效应力分量之间的关系与式(2)~式(3)类似, 其 Lamé 系数为 μ^S 、 λ^S 。

1.2 边界条件

由于是空间轴对称问题, 任意取出 rz 平面来研究(图 1)。假设桩基顶端承受时间相关的垂直均布载荷 $q(r, t)$ 作用, 饱和土体上表面是自由的; 并假设底部边界及侧表面沿 r 方向为刚性和理想不排水的。于是可给定如下边界条件。

上表面的边界条件为:

$$\begin{cases} \sigma_z^P = -q(r, t), \quad \tau_{rz}^P = 0, \quad z = H, 0 \leq r \leq r_p \\ \sigma_z^{SE} = 0, \quad \tau_{rz}^{SE} = 0, \quad p^S = 0, \quad z = H, r_p \leq r \leq r_\infty \end{cases} \quad (6a)$$

下表面的边界条件为:

$$\begin{cases} u_r^P = 0, \quad u_z^P = 0, \quad z = 0, 0 \leq r \leq r_p \\ u_r^S = 0, \quad u_z^S = 0, \quad \partial p^S / \partial z = 0, \quad z = 0, r_p \leq r \leq r_\infty \end{cases} \quad (6b)$$

对称轴上的对称性条件为:

$$u_r^P = 0, \quad \tau_{rz}^P = 0, \quad r = 0, 0 \leq z \leq H \quad (6c)$$

侧表面的边界条件为:

$$u_r^S = 0, \tau_{rz}^{SE} = 0, \partial p^S / \partial r = 0, r = r_\infty, 0 \leq z \leq H \quad (6d)$$

1.3 桩基和饱和土之间界面上的连接条件

对于图 1 所示桩-饱和土耦合系统, 在桩土之间界面上必须满足适当的连接条件。本文给出的界面条件是: 在界面处桩的位移分量、应力分量和饱和土的固相位移分量、总应力分量必须分别相等, 并且在界面处流体满足不透水边界条件。界面条件为:

$$\begin{cases} u_r^P = u_r^S, u_z^P = u_z^S; \\ \sigma_r^P = \sigma_r^S, \tau_{rz}^P = \tau_{rz}^S, \partial p^S / \partial r = 0 \end{cases}, \quad r = r_p, 0 \leq z \leq H \quad (7)$$

1.4 初始条件

假设耦合系统在初始时刻处于静止状态, 则在 $t = 0$ 时有初始条件为:

$$\begin{cases} u_r^P = u_z^P = \dot{u}_r^P = \dot{u}_z^P = 0, \\ u_r^S = u_z^S = \dot{u}_r^S = \dot{u}_z^S = 0, w_r^S = w_z^S = \dot{w}_r^S = \dot{w}_z^S = 0 \end{cases} \quad (8)$$

这样, 基本方程式(1)~式(5), 边界条件式(6), 连接条件式(7)和初始条件式(8)构成了图 1 所示桩

基-流体饱和土体耦合系统空间轴对称问题的数学模型。显然，得到问题的解析解或者半解析解都是困难的。

2 求解问题的 DQEM 和控制方程的 DQ 离散化

1971 年~1972 年, Bellman 和 Casti 等^[12-13]提出了微分求积方法(DQM)。之后, DQM 成功地应用于许多领域^[14-16], 但是传统的 DQM 在求解具有非规则区域和间断性条件的问题时, 存在一些局限性。因此许多研究者发展了微分求积单元方法(DQEM)^[17-19]。DQEM 的基本步骤是: 首先, 划分问题的求解区域为若干个子区域或者单元; 其次, 对每个单元利用 DQM 来离散控制方程和边界条件, 得到关于时间的代数-微分方程组; 第 3 步, 应用适当的方法来处理单元间界面上的连接条件以及载荷间断性条件以形成一个统一的代数-微分方程组; 最后, 利用 2 阶向后差分格式来处理时间导数, 然后在初始条件下求解。因此, DQEM 是 DQM 和近似分割原理的一种巧妙的组合, 其关键在于如何处理单元间界面连接条件以及载荷间断性条件。

DQM 的基本思想是将未知函数和它的各阶导数在某一离散点的值用解区域中所有离散点处沿某个方向的函数值的线性加权和来近似, 其中权系数与具体问题无关, 而只与解区域中所选择的离散点和试函数有关, 因此, 任何一个微分方程都可以化成一个相应的代数或者代数-微分方程。

这样, 问题的未知量 $u_r, u_z, \tilde{w}_r, \tilde{w}_z, p$ 和它们关于 r 的 k 阶导数可以被近似为:

$$\left\{ \begin{aligned} & \{u_r, u_z, \tilde{w}_r, \tilde{w}_z, p\} = \\ & \sum_{m=1}^{N_r} l_m(r) \{ (u_r)_{mj}, (u_z)_{mj}, (\tilde{w}_r)_{mj}, (\tilde{w}_z)_{mj}, (p)_{mj} \} \\ & \frac{\partial^k}{\partial r^k} \{u_r, u_z, \tilde{w}_r, \tilde{w}_z, p\} \Big|_{r=r_i} = \\ & \sum_{m=1}^{N_r} A_{im}^k(r) \{ (u_r)_{mj}, (u_z)_{mj}, (\tilde{w}_r)_{mj}, (\tilde{w}_z)_{mj}, (p)_{mj} \} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

其中: $\{(u_r)_{mj}, (u_z)_{mj}, (\tilde{w}_r)_{mj}, (\tilde{w}_z)_{mj}, (p)_{mj}\}$ 为各未知量在 $r = r_m, z = z_j$ 处的值; N_r 是 r 方向所布置的结点总数; $l_m(r)$ 是 Lagrange 插值多项式, 定义为

$$l_m(r) = \prod_{k=1, k \neq m}^{N_r} (r - r_k) / (r_m - r_k); \text{ 而 } A_{im}^k \text{ 是权系数,}$$

相应的递推公式可在文献[13]中找到。函数关于 z 的 k 阶导数有类似的公式, 相应的权系数用 $B_{\eta l}^k$ 表示。

在本文中, 耦合系统自然地划分为 2 个单元, 即区域 Ω_p 和 Ω_s 。注意到问题是一个空间轴对称问题, 可沿着 rz 平面的 r 和 z 方向, 分别在区域 Ω_p 和 Ω_s 内布置 $N_r^p \times N_z^p$ 和 $N_r^s \times N_z^s$ 结点(图 2), 结点的坐标由 Chebyshev-Lobatto 多项式的零点来决定, 并令 $N_z^p = N_z^s = N_z$ 。

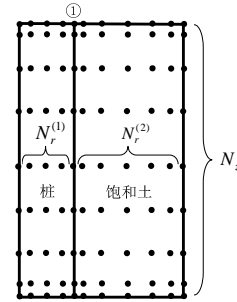


图 2 rz -平面上的布点

Fig.2 Nodes collocated on the rz - plane

将式(9)代入式(1)~式(8), 得到在空间区域中问题的 DQ 离散化公式, 可以看到它是一组关于时间 t 的代数-微分方程。

2.1 桩基控制方程的 DQ 离散化

对于由桩基所占区域 $\Omega_p (0 \leq r \leq r_p, 0 \leq z \leq H)$, 运动方程式(1)的 DQ 离散化公式为:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_r^p} A_{\zeta k}^{(1,P)} (\sigma_r^P)_{k\eta} + \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,P)} (\tau_{rz}^P)_{\zeta l} + \\ & [(\sigma_r^P)_{\zeta\eta} - (\sigma_\theta^P)_{\zeta\eta}] / r_\zeta - \rho^P (\ddot{u}_r^P)_{\zeta\eta} = 0 \\ & \sum_{k=1}^{N_r^p} A_{\zeta k}^{(1,P)} (\tau_{rz}^P)_{k\eta} + \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,P)} (\sigma_z^P)_{\zeta l} + \\ & (\tau_{rz}^P)_{\zeta\eta} / r_\zeta - \rho^P (\ddot{u}_z^P)_{\zeta\eta} = 0 \end{aligned} \right. \quad (10a)$$

其中: $\zeta = 2, 3, \dots, N_r^p - 1, \eta = 2, 3, \dots, N_z - 1$; $A_{\zeta k}^{(1,P)}$ 和 $B_{\eta l}^{(1,P)}$ 是区域 Ω_p 内在 r 和 z 方向的 1 阶导数的权系数。根据式(2)和式(3), 可以得到桩基的应变和应力分量的 DQ 离散化公式:

$$\left\{ \begin{aligned} & (\varepsilon_r^P)_{\zeta\eta} = \sum_{k=1}^{N_r^p} A_{\zeta k}^{(1,P)} (u_r^P)_{k\eta}, (\varepsilon_\theta^P)_{\zeta\eta} = (u_r^P)_{\zeta\eta} / r_\zeta \\ & (\varepsilon_z^P)_{\zeta\eta} = \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,P)} (u_z^P)_{\zeta l} \\ & (\gamma_{rz}^P)_{\zeta\eta} = \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,P)} (u_r^P)_{\zeta l} + \sum_{k=1}^{N_r^p} A_{\zeta k}^{(1,P)} (u_z^P)_{k\eta} \end{aligned} \right. \quad (10b)$$

$$\begin{cases} (\sigma_r^P)_{\zeta\eta} = (2\mu^P + \lambda^P)(\varepsilon_r^P)_{\zeta\eta} + \lambda^P((\varepsilon_\theta^P)_{\zeta\eta} + (\varepsilon_z^P)_{\zeta\eta}) \\ (\sigma_\theta^P)_{\zeta\eta} = (2\mu^P + \lambda^P)(\varepsilon_\theta^P)_{\zeta\eta} + \lambda^P((\varepsilon_r^P)_{\zeta\eta} + (\varepsilon_z^P)_{\zeta\eta}) \\ (\sigma_z^P)_{\zeta\eta} = (2\mu^P + \lambda^P)(\varepsilon_z^P)_{\zeta\eta} + \lambda^P((\varepsilon_\theta^P)_{\zeta\eta} + (\varepsilon_r^P)_{\zeta\eta}) \\ (\tau_{rz}^P)_{\zeta\eta} = \mu^P(\gamma_{rz}^P)_{\zeta\eta} \end{cases} \quad (10c)$$

其中: $\zeta = 1, 2, \dots, N_r^P$; $\eta = 1, 2, \dots, N_z$ 。

能够看到, 应变分量 ε_θ^P 在对称轴 $r = 0$ 上具有

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N_r^S} A_{\zeta k}^{(1,S)}(\sigma_r^{SE})_{k\eta} + \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,S)}(\tau_{rz}^{SE})_{\zeta l} + \{(\sigma_r^{SE})_{\zeta\eta} - (\sigma_\theta^{SE})_{\zeta\eta}\} / r_\zeta - n^S \sum_{k=1}^{N_r^S} A_{\zeta k}^{(1,S)} p_{k\eta}^S - \rho^S (\ddot{u}_r^S)_{\zeta\eta} + S_v(\tilde{w}_r^S)_{\zeta\eta} = 0 \\ \sum_{k=1}^{N_r^S} A_{\zeta k}^{(1,S)}(\tau_{rz}^{SE})_{k\eta} + \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,S)}(\sigma_z^{SE})_{\zeta l} + (\tau_{rz}^{SE})_{\zeta\eta} / r_\zeta - n^S \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,S)} p_{\zeta l}^S - \rho^S (\ddot{u}_z^S)_{\zeta\eta} + S_v(\tilde{w}_z^S)_{\zeta\eta} = 0 \\ n^F \sum_{k=1}^{N_r^S} A_{\zeta k}^{(1,S)} p_{k\eta}^S + \rho^F ((\dot{w}_r^S)_{\zeta\eta} - (\ddot{u}_r^S)_{\zeta\eta}) + S_v(\tilde{w}_r^S)_{\zeta\eta} = 0 \\ n^F \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,S)} p_{\zeta l}^S + \rho^F ((\dot{w}_z^S)_{\zeta\eta} - (\ddot{u}_z^S)_{\zeta\eta}) + S_v(\tilde{w}_z^S)_{\zeta\eta} = 0 \\ \frac{1}{r_\zeta} \sum_{k=1}^{N_r^S} A_{\zeta k}^{(1,S)} (r_\zeta ((\dot{u}_r^S)_{k\eta} + n^F (\tilde{w}_r^S)_{k\eta})) + \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,S)} ((\dot{u}_z^S)_{\zeta l} + n^F (\tilde{w}_z^S)_{\zeta l}) = 0 \end{cases} \quad (11a)$$

其中: $\zeta = 2, 3, \dots, N_r^S - 1$, $\eta = 2, 3, \dots, N_z - 1$; $A_{\zeta k}^{(1,S)}$ 和 $B_{\eta l}^{(1,S)}$ 是区域 Ω_3 内在 r 和 z 方向的 1 阶导数的权重系数。类似于式(2)和式(3), 可以得到饱和土中固相材料应变和有效应力的离散化公式。而由式(5), 总应力的离散化公式为:

$$\begin{cases} (\sigma_r^S)_{\xi\eta} = (\sigma_r^{SE})_{\xi\eta} - n^S (p^S)_{\xi\eta} \\ (\sigma_z^S)_{\xi\eta} = (\sigma_z^{SE})_{\xi\eta} - n^S (p^S)_{\xi\eta} \\ (\sigma_\theta^S)_{\xi\eta} = (\sigma_\theta^{SE})_{\xi\eta} - n^S (p^S)_{\xi\eta}, (\tau_{rz}^S)_{\xi\eta} = (\tau_{rz}^{SE})_{\xi\eta} \end{cases} \quad (11b)$$

其中, $\zeta = 1, 2, \dots, N_r^S$, $\eta = 1, 2, \dots, N_z$ 。这样在区域 Ω_3 内各结点未知量的 DQ 离散化公式由式 11(a)~式 11(b)组成。

2.3 边界条件的 DQ 离散化

根据式(6), 我们能够得到边界条件的 DQ 离散化公式。上表面边界条件的 DQ 离散化公式为:

$$\begin{cases} (\sigma_z^P)_{\xi N_z} = -q(r_\xi, t), (\tau_{rz}^P)_{\xi N_z} = 0, \\ \xi = 2, 3, \dots, N_r^P - 1 \\ (\sigma_z^{SE})_{\xi N_z} = (\tau_{rz}^{SE})_{\xi N_z} = (p^S)_{\xi N_z} = 0, \\ \xi = 2, 3, \dots, N_r^S - 1 \end{cases} \quad (12a)$$

下表面边界条件的 DQ 离散化公式为:

奇异性, 它可以被近似地离散为:

$$(\varepsilon_\theta^P)_{1\eta} = \sum_{k=1}^{N_r^P} A_{1k}^{(1,P)} (u_r^P)_{k\eta}, \quad \eta = 1, 2, \dots, N_z \quad (10d)$$

这样, 在区域 Ω_p 内, 各结点处未知量的 DQ 离散化公式由式(10a)~式(10d)组成。

2.2 饱和土控制方程的 DQ 离散化

对于饱和土所占区域 $\Omega_3 (r_p \leq r \leq r_\infty, 0 \leq z \leq H)$, 运动方程式(4)的 DQ 离散化公式为:

$$\begin{cases} (u_r^P)_{\xi 1} = (u_z^P)_{\xi 1} = 0, \\ \xi = 1, 2, \dots, N_r^P \\ (u_r^S)_{\xi 1} = (u_z^S)_{\xi 1} = \sum_{l=1}^{N_z} B_{\eta l}^{(1,S)} (p^S)_{\zeta l} = 0, \\ \xi = 1, 2, \dots, N_r^S \end{cases} \quad (12b)$$

对称轴上对称性条件的 DQ 离散化公式为:

$$(u_r^P)_{1\eta} = (\tau_{rz}^P)_{1\eta} = 0, \quad \eta = 2, 3, \dots, N_z \quad (12c)$$

侧表面边界条件的 DQ 离散化公式为:

$$(u_r^S)_{N_r^S \eta} = (\tau_{rz}^{SE})_{N_r^S \eta} = \sum_{k=1}^{N_r^S} A_{N_r^S k}^{(1,S)} (p^S)_{k\eta} = 0, \quad \eta = 2, 3, \dots, N_z \quad (12d)$$

2.4 界面条件的 DQ 离散化公式

根据式(7), 可以得到桩基和饱和土体交界面处连接条件的 DQ 离散化公式为:

$$\begin{cases} (u_r^P)_{N_r^P \eta} = (u_r^S)_{1\eta}, (u_z^P)_{N_r^P \eta} = (u_z^S)_{1\eta} \\ (\sigma_r^P)_{N_r^P \eta} = (\sigma_r^S)_{1\eta}, (\tau_{rz}^P)_{N_r^P \eta} = (\tau_{rz}^S)_{1\eta} \\ \sum_{k=1}^{N_r^S} A_{1k}^{(1,S)} (p^S)_{k\eta} = 0, \quad \eta = 2, 3, \dots, N_z - 1 \end{cases} \quad (13a)$$

对于图 1 中桩-饱和土交界点①处的连接条件需要特别地处理。处理的原则是: 保证在点①处力

的平衡和位移的连续, 且流体孔隙压为零。因此, 点①处连接条件的离散化公式为:

$$\begin{cases} (\tau_{rz}^P)_{N_r^p N_z} + (\tau_{rz}^S)_{1N_z} + (\sigma_r^P)_{N_r^p N_z} - (\sigma_r^S)_{1N_z} = 0 \\ (\sigma_z^P)_{N_r^p N_z} + (\sigma_z^S)_{1N_z} + (\tau_{rz}^P)_{N_r^p N_z} - (\tau_{rz}^S)_{1N_z} - q(r_z) = 0 \\ (u_r^P)_{N_r^p N_z} = (u_r^S)_{1N_z}, (u_z^P)_{N_r^p N_z} = (u_z^S)_{1N_z}, (p^S)_{1N_z} = 0 \end{cases} \quad (13b)$$

能够看到, 对于区域 Ω_p 和 Ω_s 内每个离散点处分别有两个和三个基本未知量, 即 $(u_r^P)_{\xi\eta}, (u_z^P)_{\xi\eta}, \zeta = 1, 2, \dots, N_r^p, \eta = 1, 2, \dots, N_z$ 和 $(u_r^S)_{\xi\eta}, (u_z^S)_{\xi\eta}, (p^S)_{\xi\eta}, \zeta = 1, 2, \dots, N_r^S, \eta = 1, 2, \dots, N_z$ 。

2.5 时间导数的离散

为了方便起见, 将 DQ 离散化方程组式(10)~式(13)写成如下的矩阵形式:

$$\tilde{\mathbf{A}} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{U}}}{dt^2} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{d \tilde{\mathbf{U}}}{dt} + \tilde{\mathbf{H}}(t, \mathbf{X}, \tilde{\mathbf{U}}) = 0 \quad (14)$$

其中: $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{u}_r^P, \tilde{u}_z^P, \tilde{u}_r^S, \tilde{u}_z^S, \tilde{p}^S]^T$ 是所有离散点处的未知量构成的矢量, $\tilde{u}_r^P, \tilde{u}_z^P, \tilde{u}_r^S, \tilde{u}_z^S, \tilde{p}^S$ 分别为相应的所有离散点处的未知量构成的子矢量; $\tilde{\mathbf{A}}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}$ 为未知量的时间导数项的系数构成的矩阵, 并且是奇异的; $\tilde{\mathbf{H}}$ 是一个矢量, 它集合了各未知量的代数函数在所有空间离散点处的值。因而, 微分方程(14)是一个具有奇异性的微分-代数系统。当时间导数采用二阶向后差分格式来逼近, 有如下迭代格式:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{A}} \left(\frac{9}{4} \tilde{\mathbf{U}}^n - 3 \tilde{\mathbf{U}}^{n-1} + \frac{3}{4} \tilde{\mathbf{U}}^{n-2} - 2 \dot{\tilde{\mathbf{U}}}^{n-1} \Delta t + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{U}}}^{n-2} \Delta t \right) + \\ & \Delta t \tilde{\mathbf{B}} \left(\frac{3}{2} \tilde{\mathbf{U}}^n - 2 \tilde{\mathbf{U}}^{n-1} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{U}}^{n-2} \right) + \\ & \Delta t^2 \tilde{\mathbf{H}}(t_n, \mathbf{X}, \tilde{\mathbf{U}}^n) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

其中, n 为当前时刻。这样问题的最终目的是在初始条件式(8)下运用 Newton-Raphson 迭代方法求微分-代数方程(15)的数值解, 从而求得 $\tilde{\mathbf{U}}^n$ 。

3 数值算例与结果分析

3.1 数值结果的验证

在分析耦合系统动态响应之前, 我们首先验证本文方法的有效性。将 DQEM 用来分析不可压流体饱和弹性无限半空间多孔介质的动态响应, 并将所得数值结果与 Boer^[20]给出的解析解进行比较。

考虑高 10 m, 半径为 1 m 的流体饱和弹性多孔介质圆柱体, 上表面为理想排水, 并承受时间相关垂直载荷 $q(r, t)$ 的作用; 下表面和侧表面沿 r 方向

为刚性和理想不排水边界。这里垂直载荷给定为 $q(r, t) = q_0 [1 - \cos(\omega t)]$, $0 \leq r \leq 1$ m, 其中, $q_0 = 3$ kN/m², $\omega = 75$ s⁻¹。流相和固相材料参数见表 1。需要特别说明的是, 这时系统中不存在桩基。

首先, 我们用 2 个虚拟单元来模拟饱和土的动力学响应。假设在 2 个单元中分别布置 $N_r^{(1)} \times N_z$ 和 $N_r^{(2)} \times N_z$ 个结点, 物理模型和结点布置示于图 3(a)中。这时虽然没有桩基, 但是单元之间的虚拟连接条件仍然需要被满足。

表 1 流体饱和土的材料参数^[20]

Table 1 Physical parameters of fluid-saturated soil^[20]

$\mu^S = 5.583 \times 10^3$ kN/m ²	$\rho^{SR} = 2000$ kg/m ³	$\gamma^{FR} = 10000$ N/m ³
$\lambda^S = 8.375 \times 10^3$ kN/m ²	$\rho^{FR} = 1000$ kg/m ³	$k^F = 0.01$ m/s
$n_{OS}^S = 0.67$	$n_{OF}^F = 0.33$	

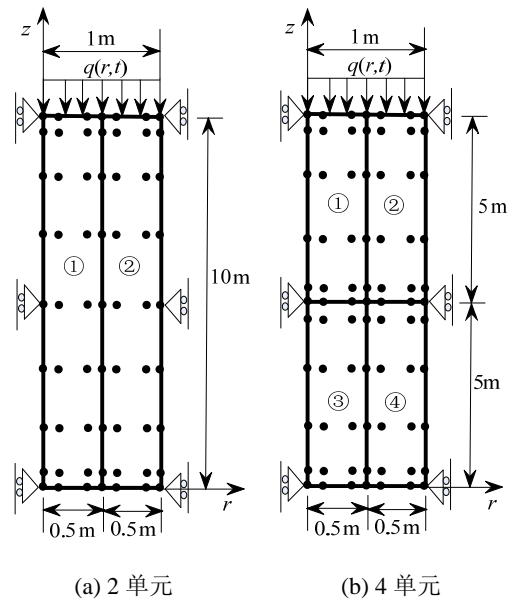


图 3 饱和土的物理模型和单元中结点的布置

Fig.3 Physical model of fluid-saturated soil and grid points collocated in each element

根据交界面上固相材料的位移、饱和土的总应力、孔隙压和流量的连续性条件, 当 $r = r^{(1)}$, $0 \leq z \leq H$, 有界面条件为:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u_r^{(2)}, u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \sigma_r^{S(1)} = \sigma_r^{S(2)}, \tau_{rz}^{S(1)} = \tau_{rz}^{S(2)}, \\ p^{(1)} &= p^{(2)}, \tilde{w}_r^{(1)} = \tilde{w}_r^{(2)} \end{aligned} \quad (16)$$

表 2 列出了不同结点数和时间步长下土表的位移 u_z (沉降)。为了比较, 也给出了 Boer^[20]解析解的数值结果, 能够看到, 由本文 DQEM 提供的数值结果与解析结果吻合良好, 当在每个单元布置 $N_r^{(1)} = N_r^{(2)} = N_z = 7$ 个结点时, 就可以得到令人满意的结果。

表 2 土表 $u_z(0,10,t)$ 的沉降(周期载荷)

Table 2 Settlement $u_z(0,10,t)$ at the soil surface under the cyclic loading

时间/s	DQEM 数值解/mm		DQEM 数值解/mm		DQEM 数值解/mm		解析解/mm
	$N_r^{(1)} = N_r^{(2)} = 7, N_z = 7$		$N_r^{(1)} = N_r^{(2)} = 8, N_z = 8$		$N_r^{(1)} = N_r^{(2)} = 9, N_z = 9$		
	$\Delta t = 0.01$ s	$\Delta t = 0.02$ s	$\Delta t = 0.01$ s	$\Delta t = 0.02$ s	$\Delta t = 0.01$ s	$\Delta t = 0.02$ s	
0.2	0.33335	0.32887	0.33855	0.33404	0.33542	0.33093	0.3413
0.4	0.47703	0.47393	0.48274	0.47964	0.47909	0.47599	0.4835
0.6	0.58663	0.58412	0.59269	0.59018	0.58871	0.58620	0.5925
0.8	0.67872	0.67656	0.68509	0.68292	0.68084	0.67867	0.6843
1.0	0.75937	0.75745	0.76600	0.76407	0.76151	0.75959	0.7652

为了进一步验证本文方法的正确性, 现在采用 4 个虚拟单元来模拟饱和土的动力响应。物理模型由图 3(b)所示。图 4 示出了 $z=5$ m 和 $z=10$ m 不同深度处土位移的时程曲线。其中, 实线和虚线代表时间步长分别为 $\Delta t = 0.01$ s、 $\Delta t = 0.02$ s 的数值结果, 而点代表 Boer^[17]的解析结果。图 5 示出了单元数对流体饱和土动力响应的影响, 其中, 时间步长为 $\Delta t = 0.01$ s。计算中, 每个单元布置了 $N_r^{(i)} \times N_z^{(i)} = 7 \times 7$ 个结点, $i = 1, 2, 3, 4$ 。能够看到, 不管是 2 单元还是 4 单元模式, 根据 DQEM 都能得到令人满意的结果。这意味着本文理论和方法是正确的, 结果是可靠的。

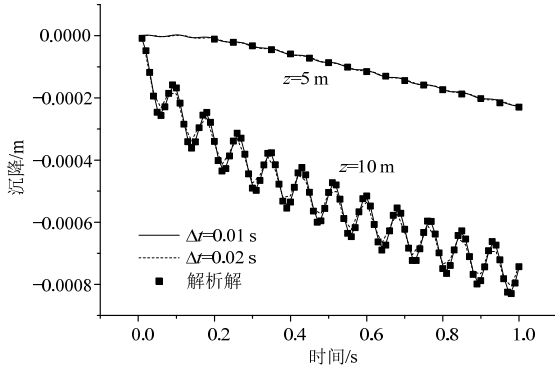


图 4 位移的时程曲线

Fig.4 Time-history curves of the settlement

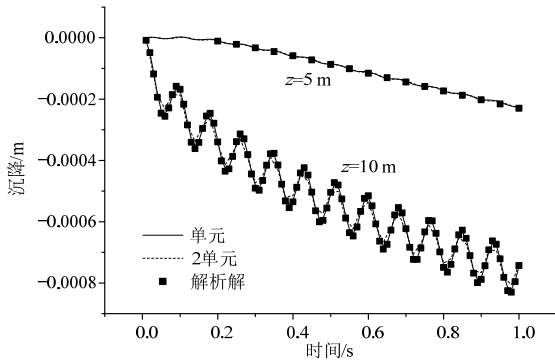


图 5 单元数对数值结果的影响

Fig.5 The effect of the number of elements

3.2 桩基-饱和土体耦合系统的动态响应

考察图 1 所示耦合系统的动态响应。这时桩-土耦合系统被划分成 2 个单元(即桩基和饱和土体)(见图 2)。桩基和饱和土材料参数见表 3, 其中 n_{OS}^S 和 n_{OF}^F 为初始状态时固相和流相的体积分数。给定计算区域为 $H = 40$ m, $r_p = 0.5$ m, $r_\infty = 80$ m。考察两种时间相关的垂直载荷: 周期加载 $q(t) = q_0[1 - \cos(\omega t)]$ 和阶梯加载 $q(t) = q_0 h(t)$, 其中 $q_0 = 50.70$ kN/m², $\omega = 50$ s⁻¹, 而 $h(t)$ 是 Heaviside 函数。计算中, 在图 2 的单元(1)和单元(2)中分别布置了 $N_r^P \times N_z^P = 10 \times 19$ 和 $N_r^S \times N_z^S = 19 \times 19$ 个结点, 并取 $\Delta t = 0.02$ s。

表 3 耦合系统的物理参数

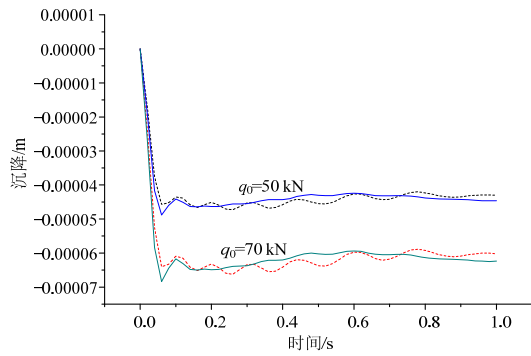
Table 3 Physical parameters coupled system

饱和土		
$\mu^S = 5.583 \times 10^3$ kN/m ²	$\rho^{FR} = 1000$ kg/m ³	$\rho^{SR} = 2000$ kg/m ³
$\lambda^S = 8.375 \times 10^3$ kN/m ²	$\gamma^{FR} = 10000$ N/m ³	$k^F = 0.00001$ m/s
$n_{OF}^F = 0.33, 0.5$	$n_{OS}^S = 0.67, 0.5$	—
桩		
$\mu^P = 5.5 \times 10^6$ kN/m ²	$\lambda^P = 8.25 \times 10^6$ kN/m ²	$\rho^P = 2500$ kg/m ³

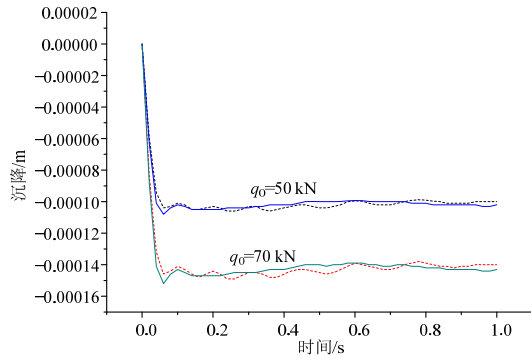
3.2.1 流体饱和土中桩基的动态响应

对于给定载荷, 图 6~图 7 示出了桩基不同点 $(r, z) = (0, 20), (r, z) = (0, 40)$ 处沉降 u_z^P (位移)的时程曲线, 其中虚线和实线分别相应于 $n_{OF}^F = 0.33$ 和 $n_{OF}^F = 0.5$ 的结果。能够看到, 在阶梯加载下流相孔隙度对桩基沉降的影响比较小, 并且当时间 t 从 0 s 到 0.6 s 变化时, 桩基的沉降迅速下降, 而在 $t=0.6$ s 以后, 沉降稳态增加。然而, 在周期加载下具有高频振动的桩基, 其沉降随流相孔隙度增加而增加。

对于不同时刻 $t=0.1$ s、 $t=0.2$ s 图 8~图 9 显示出了不同孔隙度 $n_{OF}^F = 0.33, n_{OF}^F = 0.5$ 下, $r=0.5$ m 处桩基的剪应力随深度 z 的变化。能够看到, 在阶梯加载情况下, 剪应力从底部到接近桩头近似线性增加,



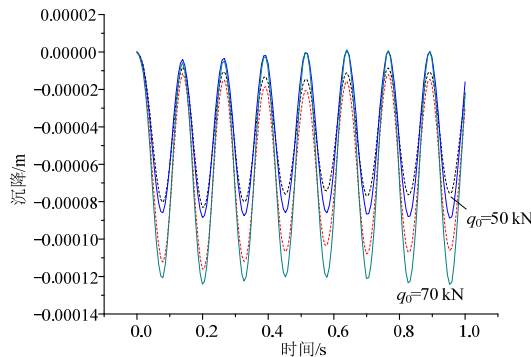
(a) 点(0, 20)



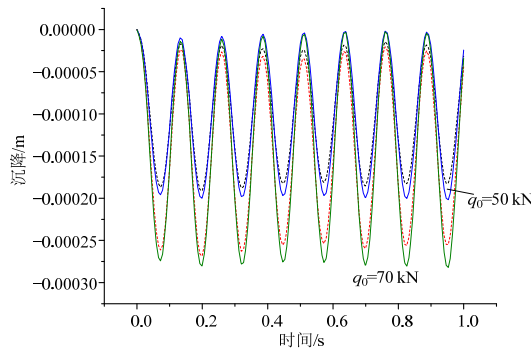
(b) 点(0, 40)

图6 沉降时程曲线(阶梯加载)

Fig.6 The time-history curves of the settlement (for the step loading)



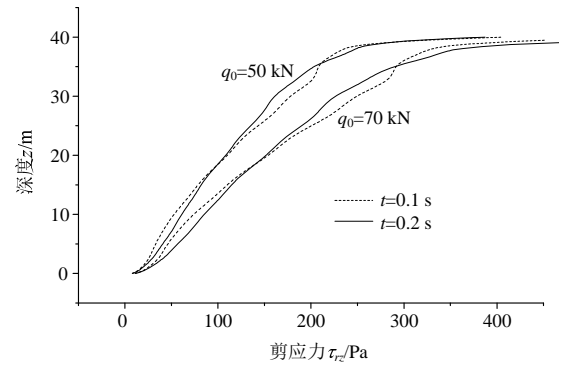
(a) 点(0, 20)



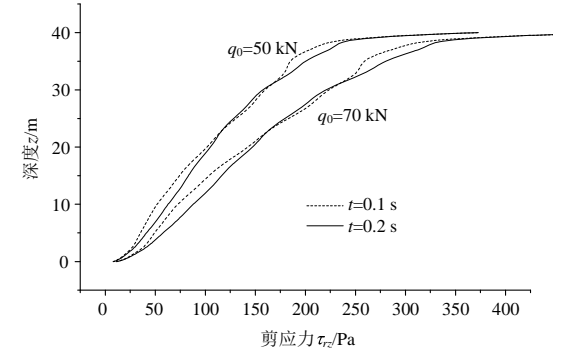
(b) 点(0, 40)

图7 沉降时程曲线(周期加载)

Fig.7 The time-history curves of the settlement (for the cyclic loading)



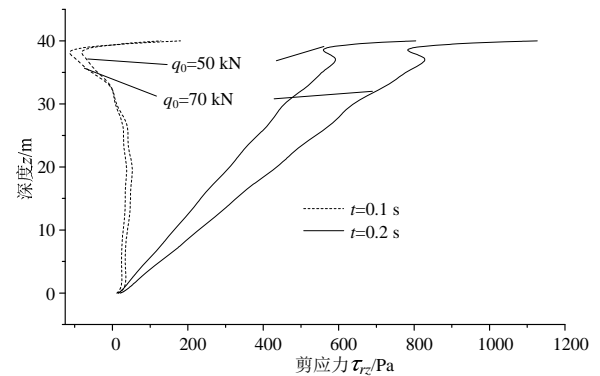
(a) $n_{OF}^F = 0.33$



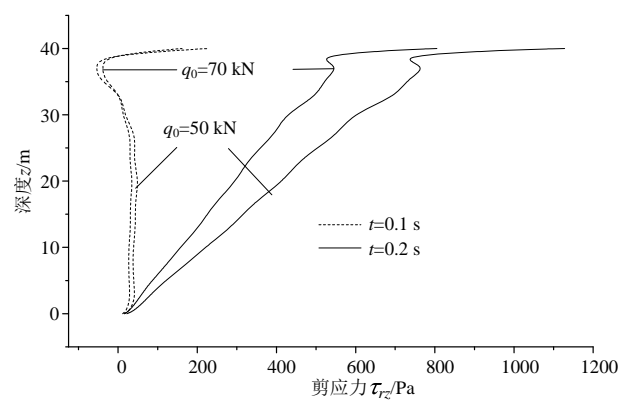
(b) $n_{OF}^F = 0.5$

图8 桩周剪应力(阶梯加载)

Fig.8 Shear stress around the pile (for the step loading)



(a) $n_{OF}^F = 0.33$



(b) $n_{OF}^F = 0.5$

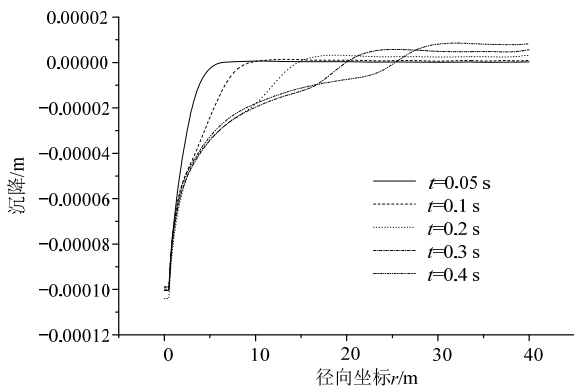
图9 桩周剪应力(周期加载)

Fig.9 Shear stress around the pile (for the cyclic loading)

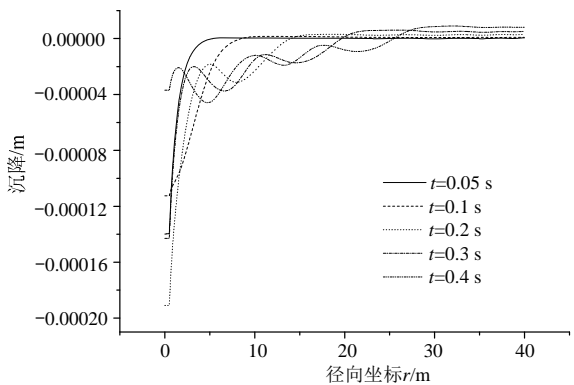
而在桩头附近迅速增加(图 8)。对于周期加载, 当 $t=0.1$ s 时, 在桩头附近将出现负摩擦, 然而对于阶梯加载不会发生这种现象。此外, 孔隙度对桩周的摩阻力的影响是明显的, 摩阻力随孔隙度的增加显著地降低。

3.2.2 饱和土的动态响应

同样, 也可以获得饱和土的动态响应。在图 11 中给出了不同时刻土表处的沉降曲线, 在图 12 中示出了不同深度处桩周孔隙压的时程曲线。计算中取载荷幅值 $q_0=50$ kN。限于篇幅, 不再一一讨论。



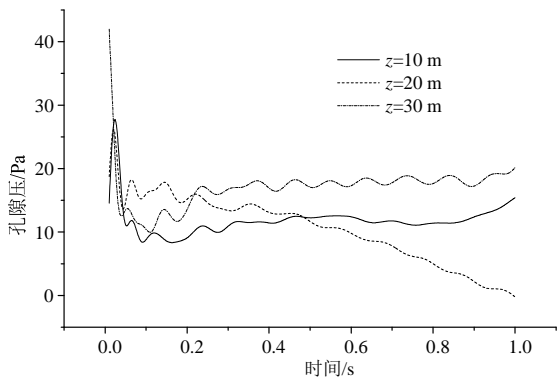
(a) 阶梯加载



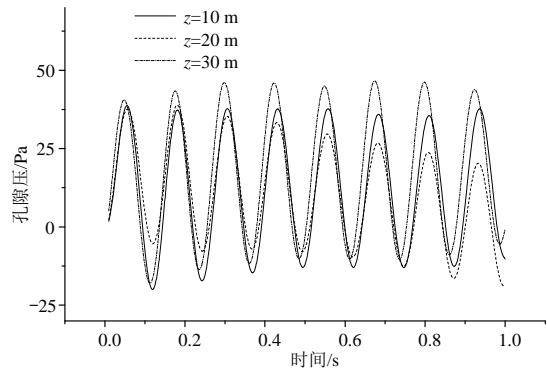
(b) 周期加载

图 10 不同时刻的土表沉降曲线

Fig.10 The settlement curves at the soil surface for the different time



(a) 阶梯加载



(b) 周期加载

图 11 不同深度处桩周孔隙压的时-程曲线

Fig.11 The time-history curves of the pore pressure at the different depths

4 结论

本文基于多孔介质理论 PMT, 首先建立了桩基和饱和土体组成的空间轴对称耦合系统的动态响应的数学模型。其次, 发展了求解该问题的 DQEM, 其中提出了正确处理界面连接条件的一般方法。利用所发展的 DQEM, 在空间域内对控制微分方程进行了离散, 得到关于时间的一组代数微分方程。然后采用 2 阶向后差分格式离散了时间导数, 最后利用 Newton-Raphson 迭代方法在初始条件下求得了问题的数值解。本文所得的数值结果与 Boer 的解析结果吻合良好, 说明了本文理论和方法的正确性以及结果的可靠性; 同时考察了单元数和结点数对数值结果收敛性的影响。能够看到, 本文提出的 DQEM 具有计算量小、精度高、稳定性好和收敛性快等优点。利用本文方法计算和分析了桩基-饱和土耦合系统的动态响应, 同时获得了桩基和饱和土的一些动力学特性。由计算结果分析可见, 为了避免采用类似“Winkler 假设”来模拟土体对桩基的反作用, 把桩基和土体组合成一个耦合系统来模拟桩基和土的力学行为以及它们之间的相互作用的思路是可行的。本文所提供的这种计算量小、精度高、稳定性好的新的数值方法也可用来分析计算类似这类耦合系统以及更复杂的耦合系统的动力学响应, 本文仅仅是一种初步的尝试。

参考文献:

- [1] de Boer R. Theory of porous media: Highlights in the historical development and current state [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000:1-20.
- [2] de Boer R. Theoretical poroelasticity-a new approach [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 25(4): 861-878.

- [3] Apirathvorakij V, Karasudhi P. Quasi-static bending of a cylindrical elastic bar partially embedded in a saturated elastic half-space [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1980, 16(7): 625–644.
- [4] Zeng X, Rajapakse R K N D. Dynamic axial load transfer from elastic bar to poroelastic medium [J]. *Journal of Engineering mechanics*, 1999, 125(9): 1048–1055.
- [5] Jin B, Zhou D, Zhong Z. Lateral dynamic compliance of pile embedded in poroelastic half space [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2001, 21(6): 519–525.
- [6] Zhou X L, Wang J H, Jiang L F, Xu B. Transient dynamic response of pile to vertical load in saturated soil [J]. *Mechanics Research Communications*, 2009, 36(5): 618–624.
- [7] 李强, 郑辉, 王奎华. 饱和土中摩擦桩竖向振动解析解及应用[J]. *工程力学*, 2011, 28(1): 157–162.
Li Qiang, Zheng Hui, Wang Kuihua. Analytical solution and its application of vertical vibration of a friction pile in saturated soil [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(1): 157–162. (in Chinese)
- [8] Wang J H, Zhou X L, Lu J F. Dynamic response of pile groups embedded in a poroelastic medium [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2003, 23(3): 53–60.
- [9] Maeso O, Aznarez J J, Garcia F. Dynamic impedances of piles and groups of piles in saturated soils [J]. *Computers & Structures*, 2005, 83(10/11): 769–782.
- [10] 刘林超, 杨骁. 饱和土中桩-桩竖向动力相互作用及群桩竖向振动[J]. *工程力学*, 2011, 28(1): 124–130.
Liu Linchao, Yang Xiao. Pile to pile vertical dynamic interaction and vertical vibration of pile groups in saturated soil [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(1): 124–130. (in Chinese)
- [11] Liang F Y, Song Z. BEM analysis of the interaction factor for vertically loaded dissimilar piles in saturated poroelastic soil [J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, 62: 223–231.
- [12] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, 34(2): 235–238.
- [13] Bellmam R, Kashef B G, Casti J. Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1972, 10(1): 40–52.
- [14] Bert C W, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, 49(1): 1–28.
- [15] 聂国隽, 仲政. 用微分求积法求解梁的弹塑性问题[J]. *工程力学*, 2005, 22(1): 59–62, 27.
Nie Guojun, Zhong Zheng. Elasto-plastic analysis of beams by differential quadrature method [J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(1): 59–62, 27. (in Chinese)
- [16] 张琼, 杜永峰, 朱前坤. 基于微分求积法的 Euler-Bernoulli 梁的大变形力学行为研究[J]. *工程力学*, 2014, 31(增刊 1): 1–4, 10.
Zhang Qiong, Du Yongfeng, Zhu Qiankun. Study on large deformation mechanical behavior of Euler-Bernoulli beam using DQM [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(Suppl 1): 1–4, 10. (in Chinese)
- [17] Hu Y J, Zhu Y Y, Cheng C J. DQEM for large deformation analysis of structures with discontinuity conditions and initial displacements [J]. *Engineering Structures*, 2008, 30(5): 1473–1487.
- [18] 胡育佳, 朱媛媛, 程昌钧. 求解几何非线性桩-土耦合系统的微分求积单元法[J]. *固体力学学报*, 2008, 29(2): 141–148.
Hu Yujia, Zhu Yuanyan Cheng Changjun. DQEM for solving pile-soil coupling systems with geometrical non-linearity [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, 29(2): 141–148. (in Chinese)
- [19] Wang X W, Wang Y L. Free vibration analysis of multiple-stepped beams by the differential quadrature element method [J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2013, 219(11): 5802–5810.
- [20] de Boer R, Ehlers W, Liu Z. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1993, 63(1): 59–72.