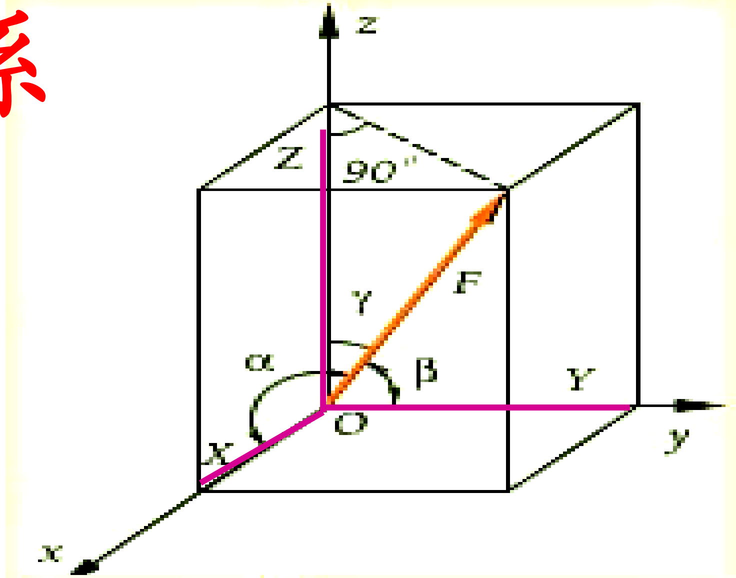
# 第四章　空间力系

# §4-1 空间汇交力系

## 1. 力在直角坐标上的投影

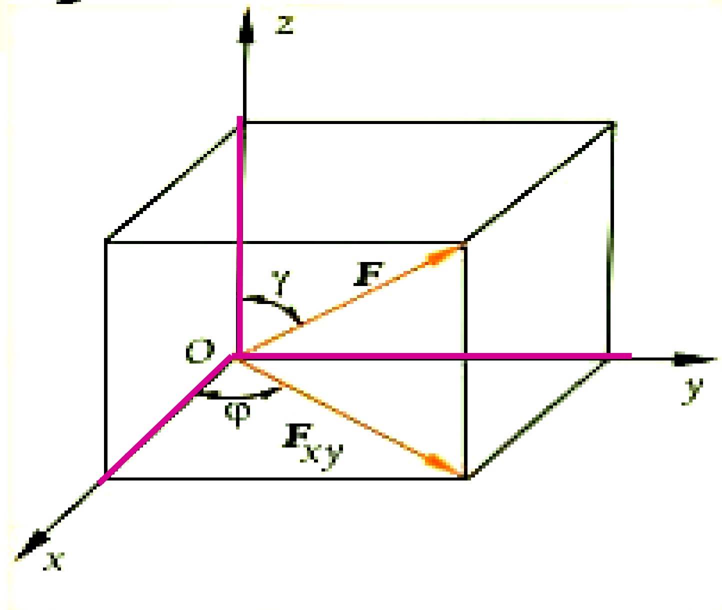
### （1）一次（直接）投影法

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\alpha \\ Y &= F\cos\beta \\ Z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right\}$$




### （2）二次（间接）投影法

$$\left.\begin{aligned} X &= F\sin\gamma\cos\varphi \\ Y &= F\sin\gamma\sin\varphi \\ Z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right\}$$

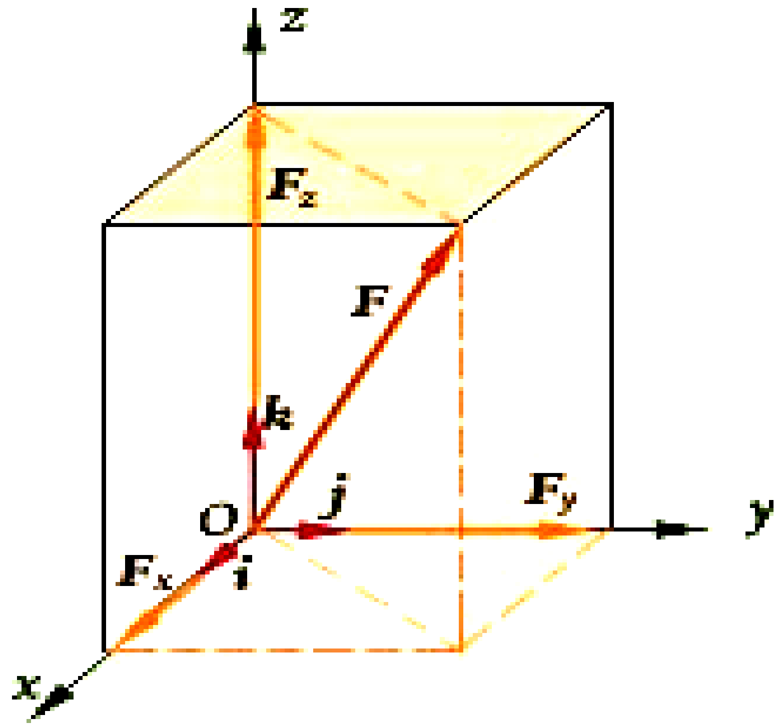


# 2、分力与力的投影

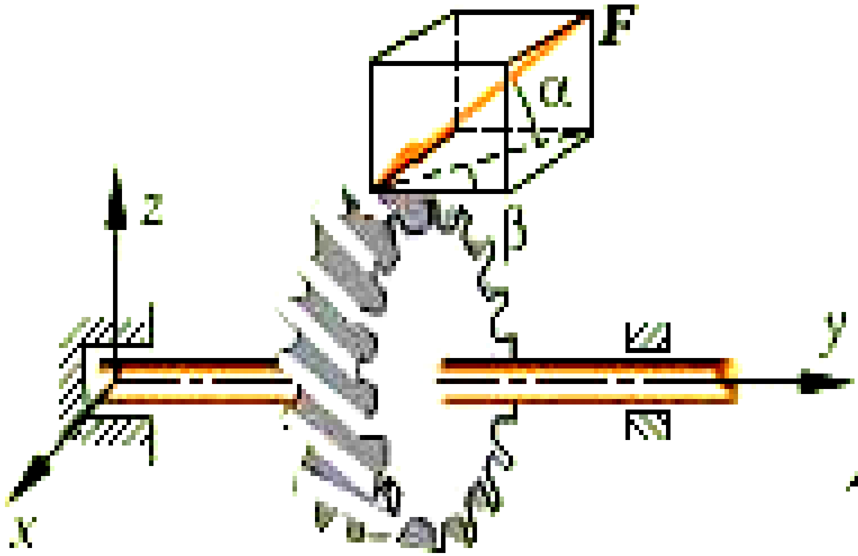
$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_x+\boldsymbol{F}_y+\boldsymbol{F}_z$$

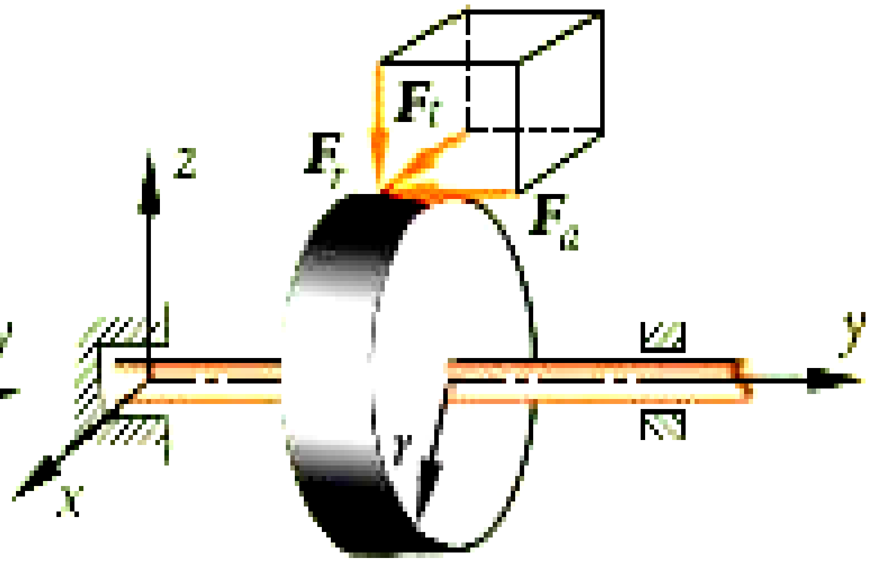
$$= X\mathrm{i}+Y\mathrm{j}+Z\mathrm{k}$$

$$\left.\begin{aligned}
F &= \sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}+F_z^{\,2}}\\
\cos(F,i) &= \frac{F_x}{F}\\
\cos(F,j) &= \frac{F_y}{F}\\
\cos(F,k) &= \frac{F_z}{F}
\end{aligned}\right\}$$



例 半径$r$的斜齿轮，其上作用力$F$，如图所示。求力在坐标轴上的投影。




$$X = F_t = F\cos\alpha\sin\beta \qquad Y = F_a = -F\cos\alpha\cos\beta$$

$$Z = F_r = -F\sin\alpha$$

# 2.空间汇交力系的合成与平衡条件

## (1)空间汇交力系的合成

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum \boldsymbol{F}$$

合力等于各分力的矢量和。合力的作用线通过汇交点.

$$\boldsymbol{F}_R=\sum X\mathrm{i}+\sum Y\mathrm{j}+\sum Zk$$

合力在某轴上的投影等于力系中所有各力在同一轴上投影的代数和。

$$F_R=\sqrt{(\sum X)^2+(\sum Y)^2+(\sum Z)^2}$$

$$\cos(F_R,i)=\frac{\sum X}{F_R}\qquad \cos(F_R,j)=\frac{\sum Y}{F_R}\qquad \cos(F_R,k)=\frac{\sum Z}{F_R}$$

## (2)空间汇交力系的平衡

$$\boldsymbol{F}_R = 0$$

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0\end{array}\right\}$$

力系中所有各力在三个坐标轴上的投影的代数和分别等于零。

三个方程—求解三个未知数。

挂物架如图所示,三杆的重量不计，平面**BOC**为水平面，且**OB=OC**，若在**O**点挂一重物**G=1000N**，求三杆所受的力。

解：三杆均为二力杆

$$\sum F_z = 0 \quad F_{OA}\cos 45^\circ = G$$

$$F_{OA} = 1414N$$

$$\sum F_x = 0$$

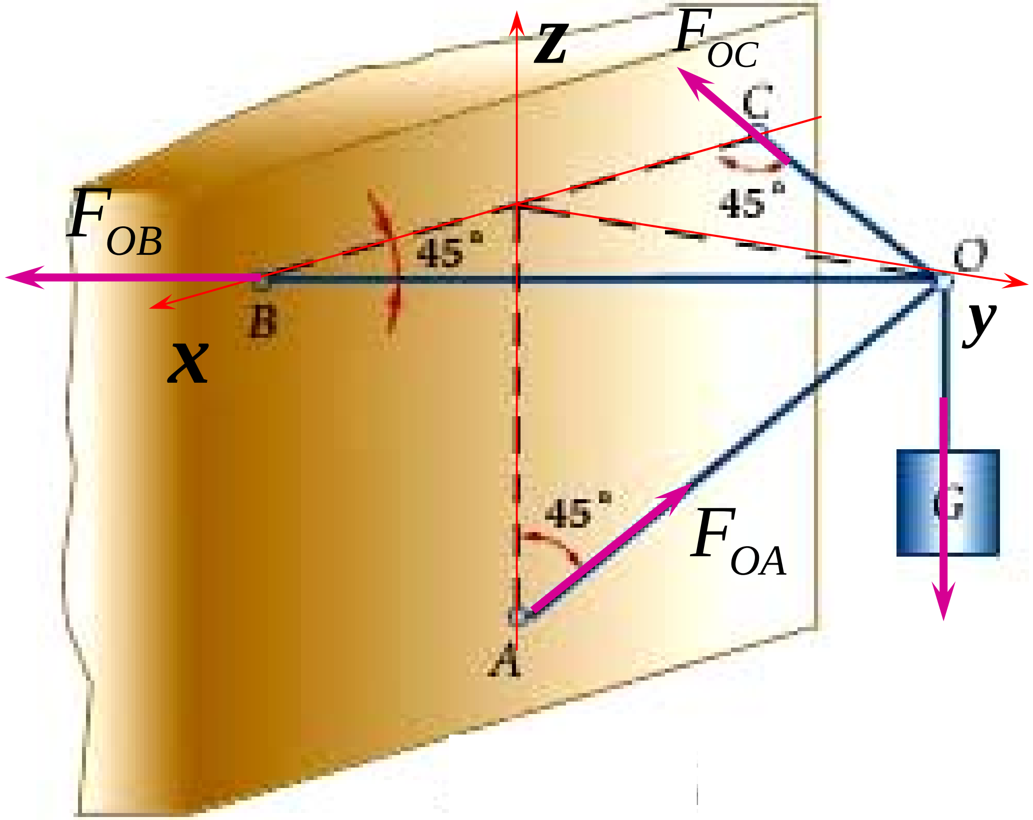
$$F_{OC}\cos 45^\circ = F_{OB}\cos 45^\circ$$

$$F_{OC} = F_{OB}$$

$$\sum F_y = 0$$

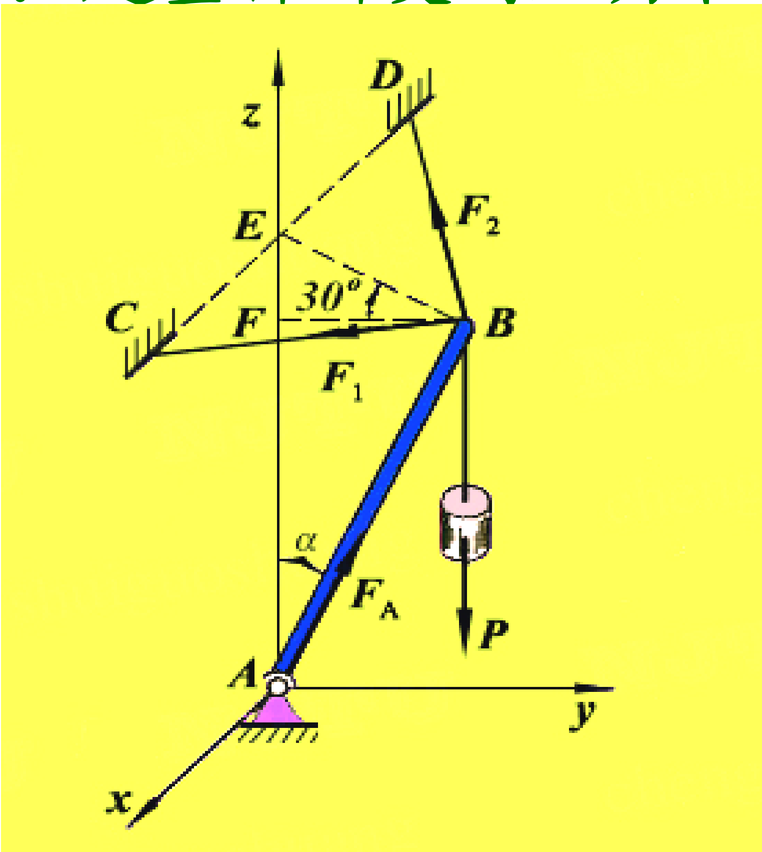
$$2F_{OB}\sin 45^\circ = F_{OA}\sin 45^\circ$$

$$F_{OC} = F_{OB} = 707N$$

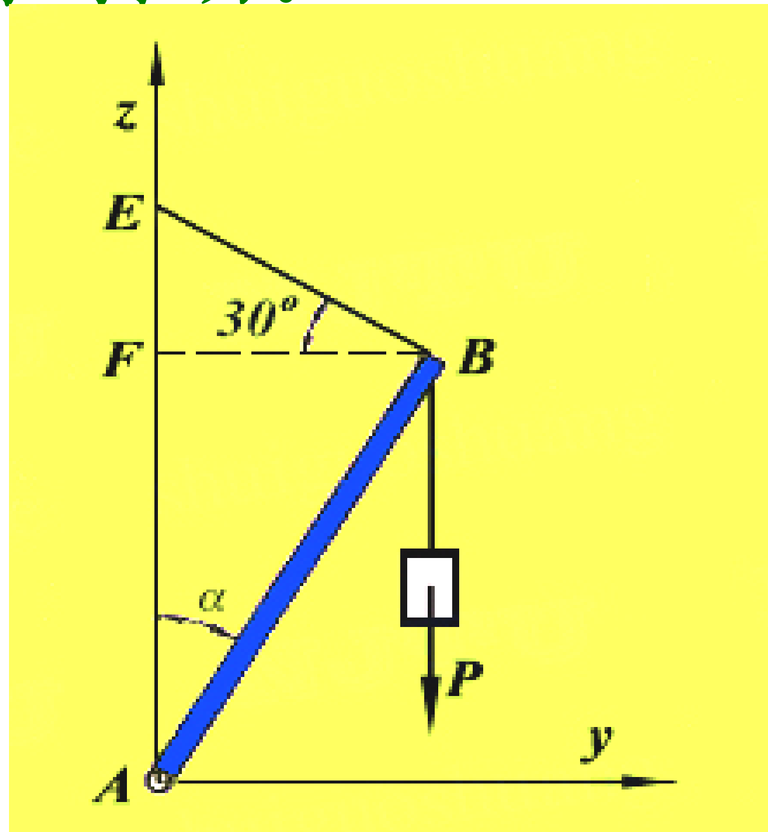


例 $\alpha = 30°$ $CE = EB = DE$ $\angle EBF = 30°$ $P = 10\ \text{kN}$

试求：起重杆所受的压力和绳子的拉力。$\angle C = \angle D = 45°$




空间撑杆 (a)




空间撑杆 (b)

$\sum F_x = 0 \quad F_1 \sin 45° - F_2 \sin 45° = 0$

$\sum F_y = 0$

$F_A \sin 30° = F_1 \cos 45° \cos 30°$

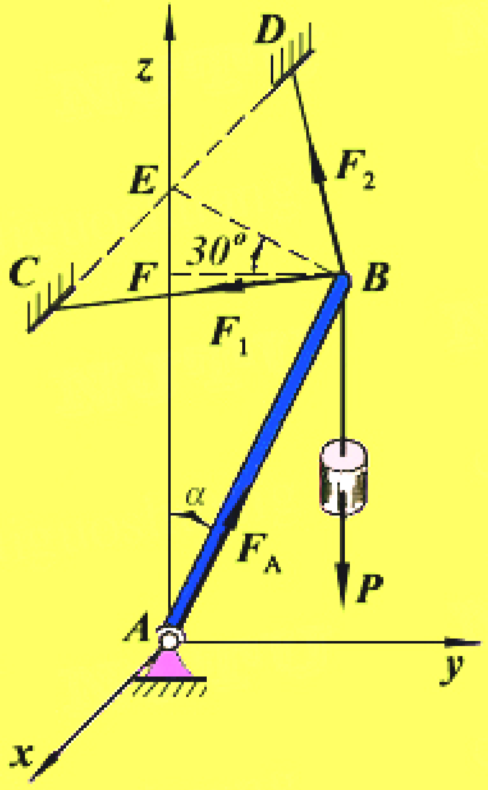
$+ F_2 \cos 45° \cos 30°$

$\sum F_z = 0 \qquad F_1 = F_2 = 3.54 \text{kN}$

$F_1 \cos 45° \sin 30° + F_2 \cos 45° \sin 30°$

$+ F_A \cos 30° = P$

解得 $F_A = 8.66 \text{ kN}$




空间撑杆 (a)

# §4-2 力对点之矩和力对轴之矩

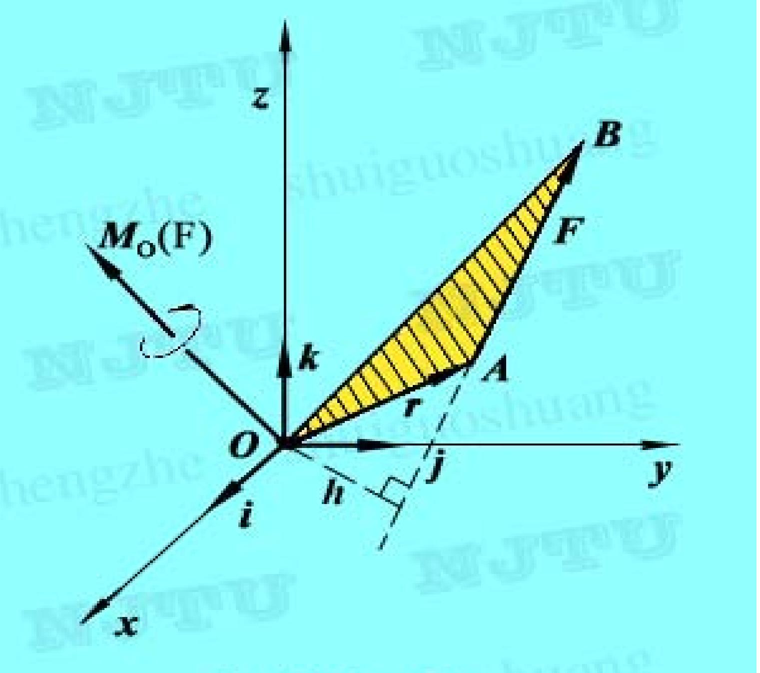
一、力对点之矩的定义： $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$

$$|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|=M_O(\boldsymbol{F})=rF\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{F})$$

$$=Fh=2\Delta OAB$$

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

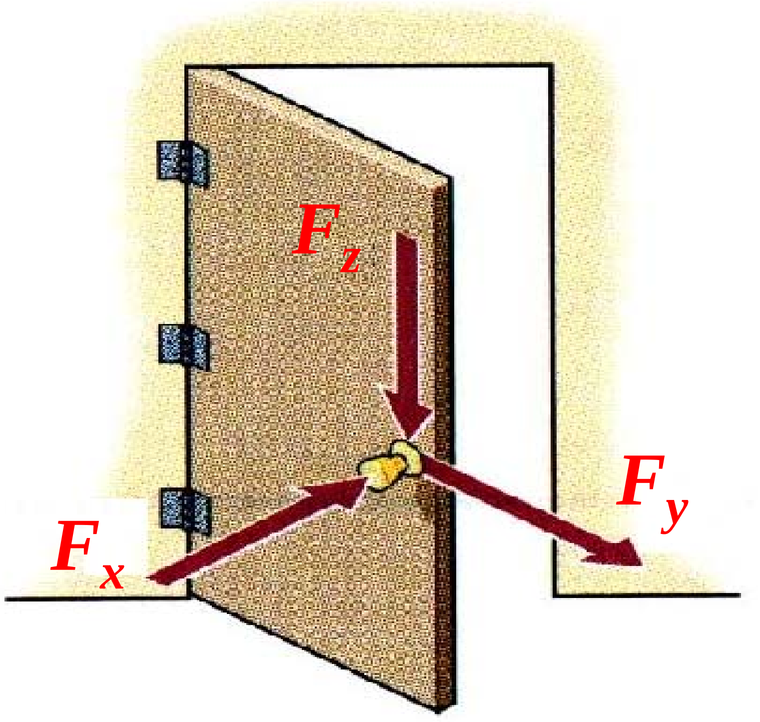
$$=(yF_z-zF_y)\boldsymbol{i}+(zF_x-xF_z)\boldsymbol{j}+(xF_y-yF_x)\boldsymbol{k}$$




力对点之矩

## 二. 力对轴之矩

力对轴之矩为力使刚体绕轴转动效果的度量，是一代数量。



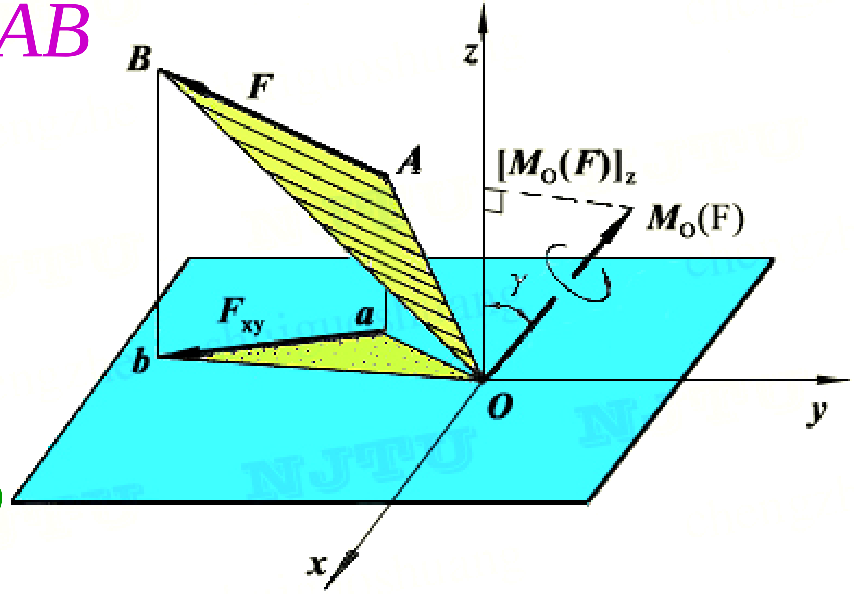

*力与轴平行或相交时，力对该轴的矩等于零。

$$\left|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\right| = M_O(\boldsymbol{F}) = 2\Delta OAB$$

力对点之矩:

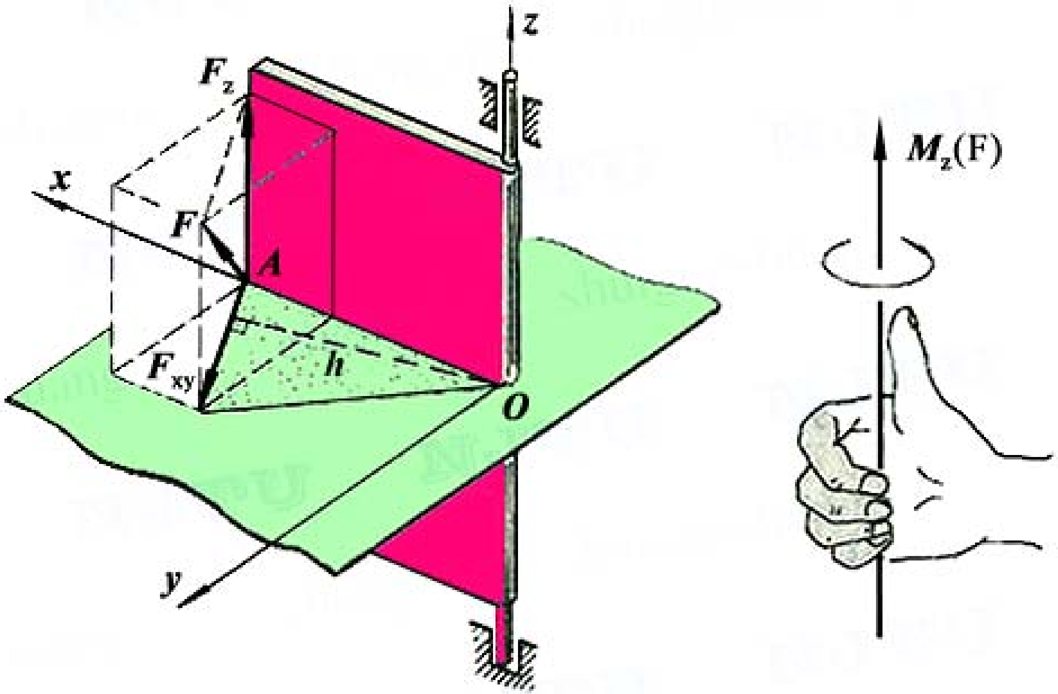
$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy})$$

$$= \pm F_{xy} \cdot h = 2\Delta Oab$$




力对点之矩和力对轴之矩的关系

力对轴的矩等于该力在与轴垂直的平面上的投影对轴与平面交点之矩。




力对轴之矩的定义

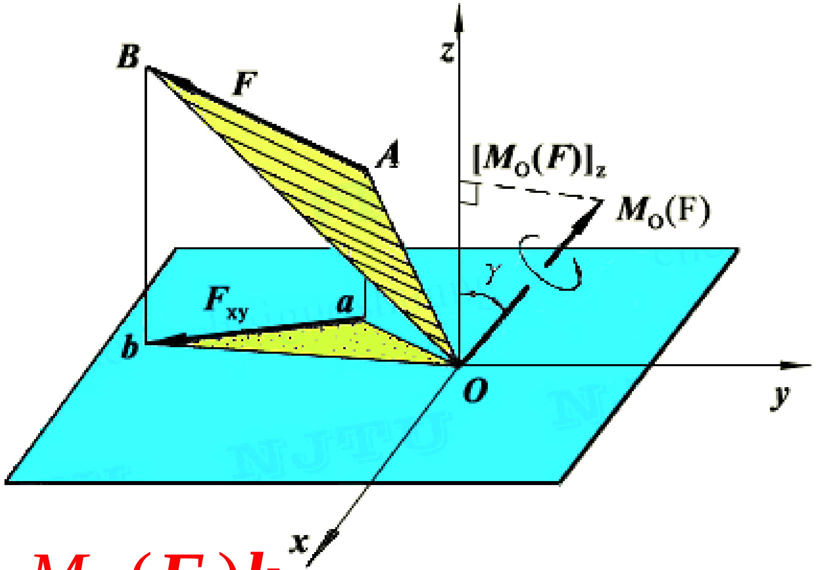
## 三、力对点之矩与力对轴之矩的关系

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{k}$$

$$= |\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|\cdot 1\cdot\cos\gamma$$

$$= 2\Delta OAB\cdot\cos\gamma$$

$$= 2\Delta Oab \;= M_z(\boldsymbol{F})$$




$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k}$$

力对点之矩和力对轴之矩的关系

力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于力对该轴的矩。

# 小　结

1、力对点之矩是理解空间力系简化和合成的关键；

2、力对轴之矩是正确列出矩式平衡方程的基础；

❖ 力臂便于确定，可按定义计算

❖ 一般将力沿坐标轴分解，应用合力矩定理

❖ 将力沿坐标轴分解之后，代入力对轴之矩的解析表达式

❖ 利用力对点之矩的关系计算

注意力对轴之矩数值的正、负或零

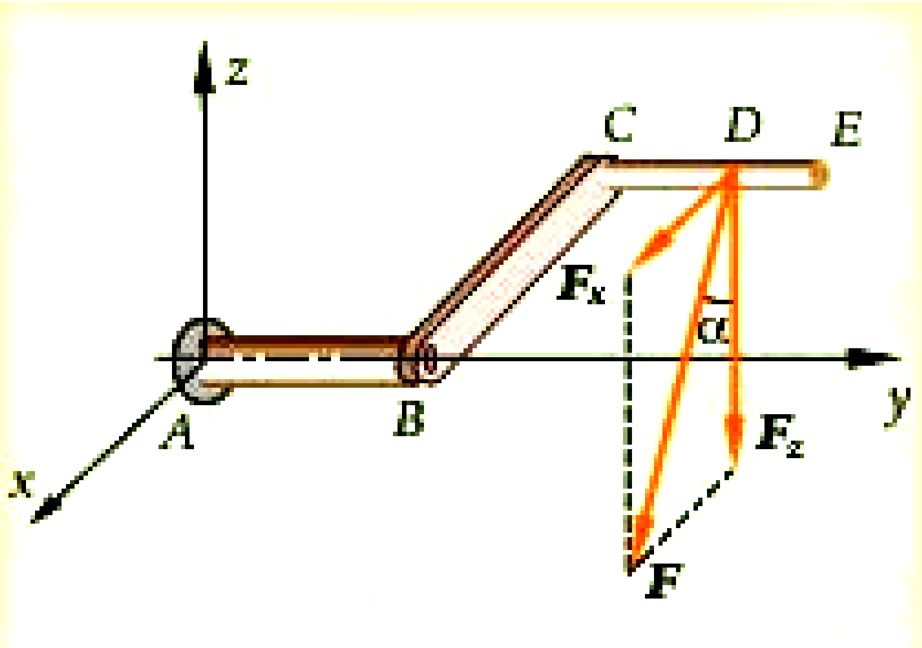
例 手柄*ABCE*在平面*Axy*内，*F*在垂直于*y*轴的平面内，*AB*=*BC*=*L*，*CD*=*a*。试求力对*x*、*y*和*z*三轴之矩。

解: $F_x = F\sin\alpha$ $F_z = F\cos\alpha$

$$M_x(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F}_z) = -F_z(AB+CD) = -F(l+\alpha)\cos\alpha$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = M_y(\boldsymbol{F}_z)$$
$$= -F_z BC = -Fl\cos\alpha$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}_x)$$
$$= -F_x(AB+CD)$$
$$= -F(l+\alpha)\sin\alpha$$



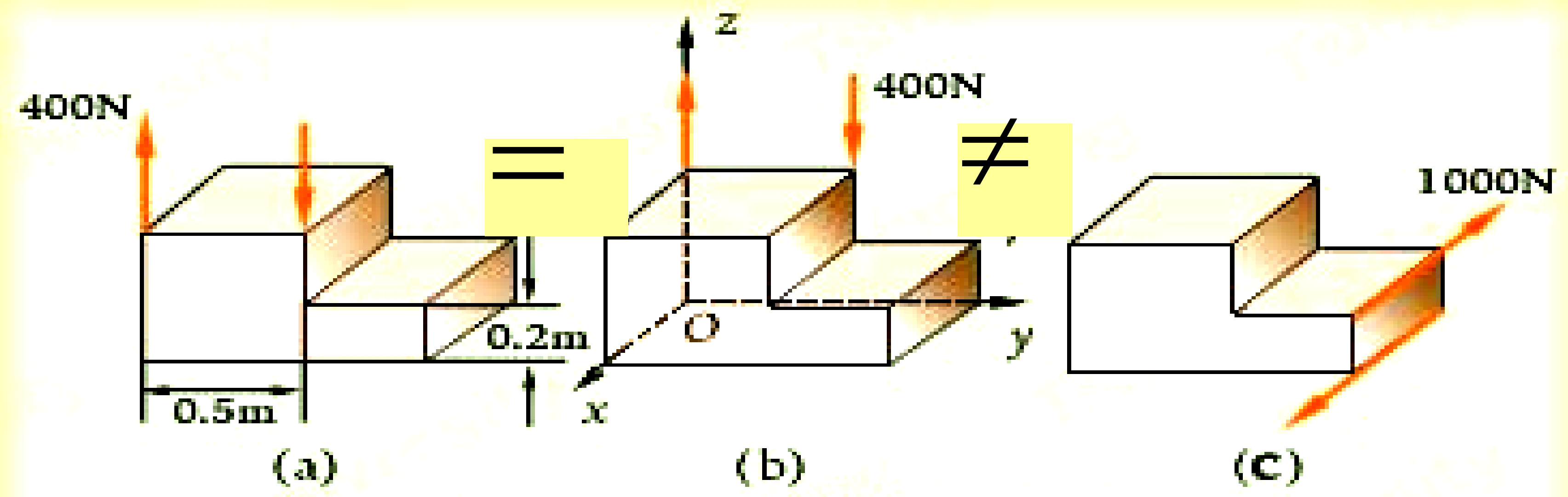
# §4-3 空间力偶系

## 1. 力偶矩矢

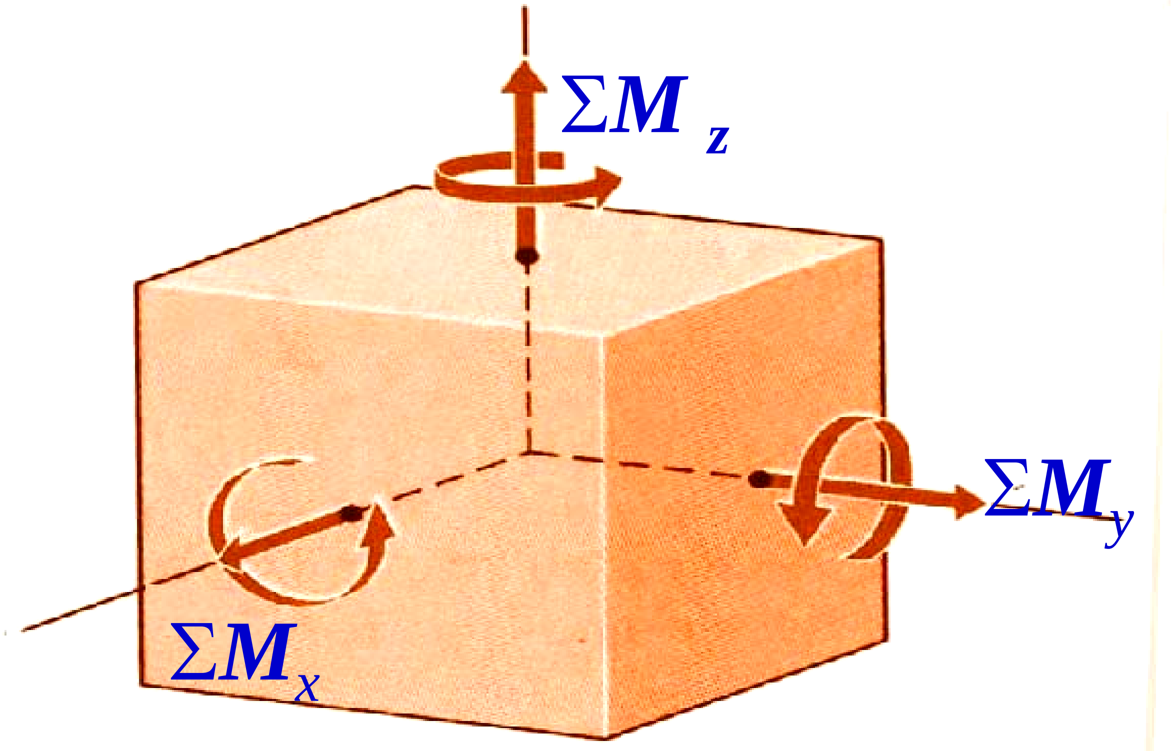
空间力偶三要素：力偶矩的大小；力偶作用面在空间的方位；力偶在作用面内的转向。

## 2. 力偶等效条件

若两力偶的力偶矩矢相等，则两力偶等效。



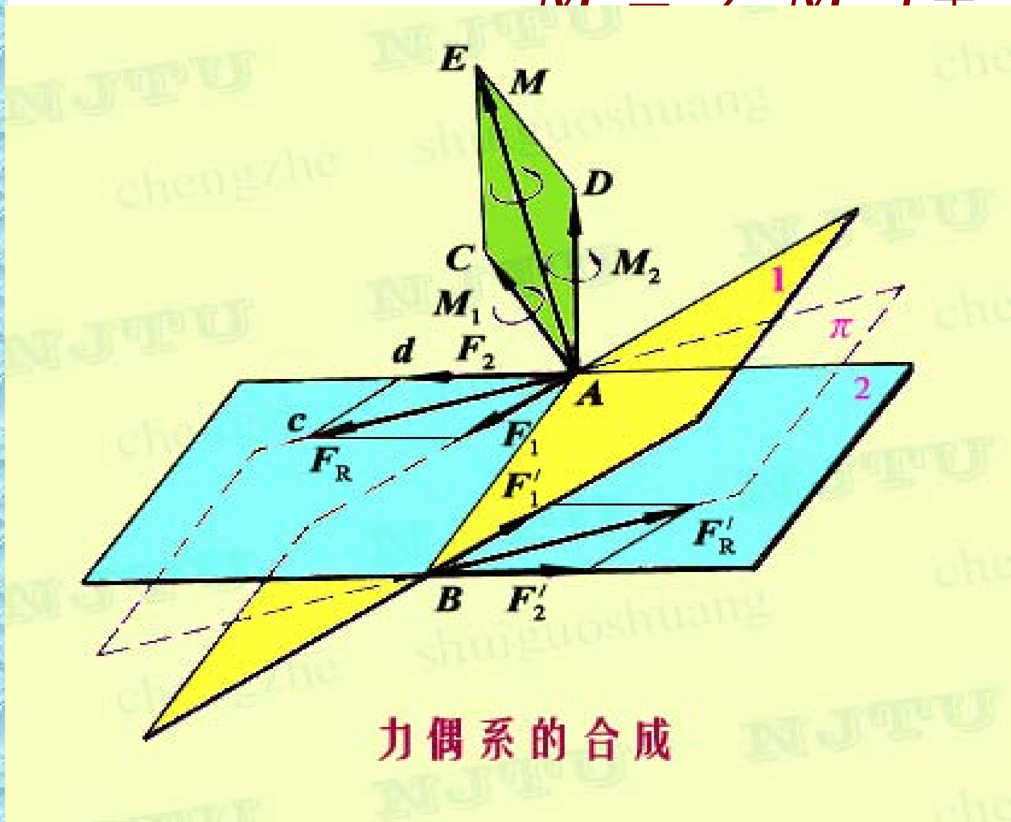
# 3. 空间力偶系的合成与平衡条件



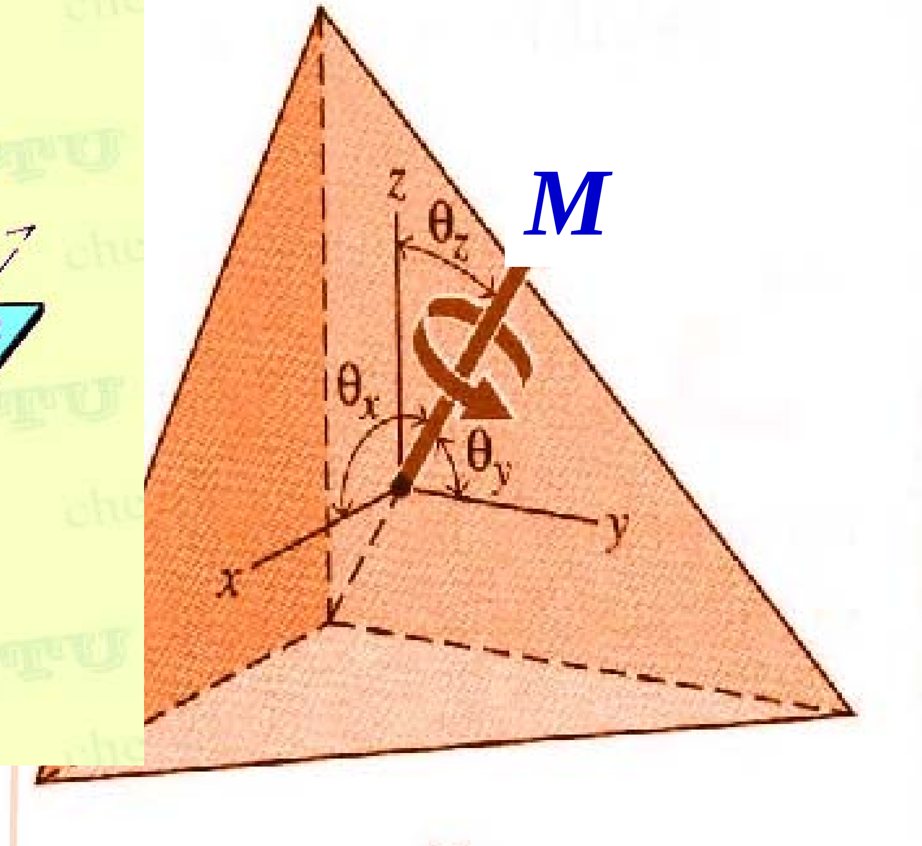
## (1) 力偶系的合成:

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2+\cdots\cdots\boldsymbol{M}_n=\sum\boldsymbol{M}_i$$

$$M=\sum M_x i+\sum M_Y j+\sum M_Z k$$




力偶系的合成



已知直角三棱柱上作用力 $F_1 = F_1' = 200\,\text{N}$，$F_2 = F_2' = 100\,\text{N}$

试求：它们的合成结果。

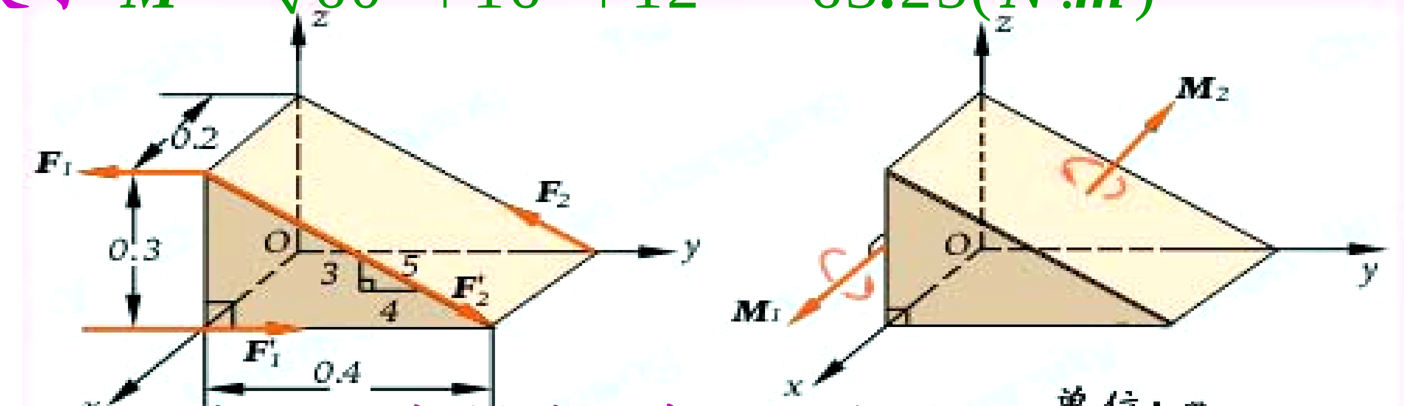
作用在三棱柱上的两个力偶，可分别用力偶矩矢表示

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{F} \cdot 0.3\text{i} = 60\text{i}(\text{N.m})$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \frac{4}{5}\boldsymbol{F} \cdot 0.2\text{j} + \frac{3}{5}\text{F} \cdot 0.2\text{k} = 16\text{j} + 12\text{k}(\text{N} \cdot \text{m})$$

其合力偶矩矢: $\boldsymbol{M} = 60i + 16j + 12k(\boldsymbol{N.m})$

合力偶矩大小 $\boldsymbol{M} = \sqrt{60^2 + 16^2 + 12^2} = 63.25(\boldsymbol{N.m})$




求合力偶矩矢，一般只需求得其沿各坐标轴的分量即可

（2）平衡条件:

$$\boldsymbol{M}=\sum \boldsymbol{M}_i=0$$

$$\left.\begin{aligned}\sum M_x&=0\\ \sum M_y&=0\\ \sum M_z&=0\end{aligned}\right\}$$

力偶系中所有各力偶矩矢在三坐标轴上投影的代数和分别等于零

三个方程—求解三个未知数

图示三圆盘*A*、*B*和*C*的半径分别为150mm、100mm和50mm。求: 力*F* 的大小和$\alpha$角。

$$M_A = 30N.m$$

$$M_B = 4N.m$$

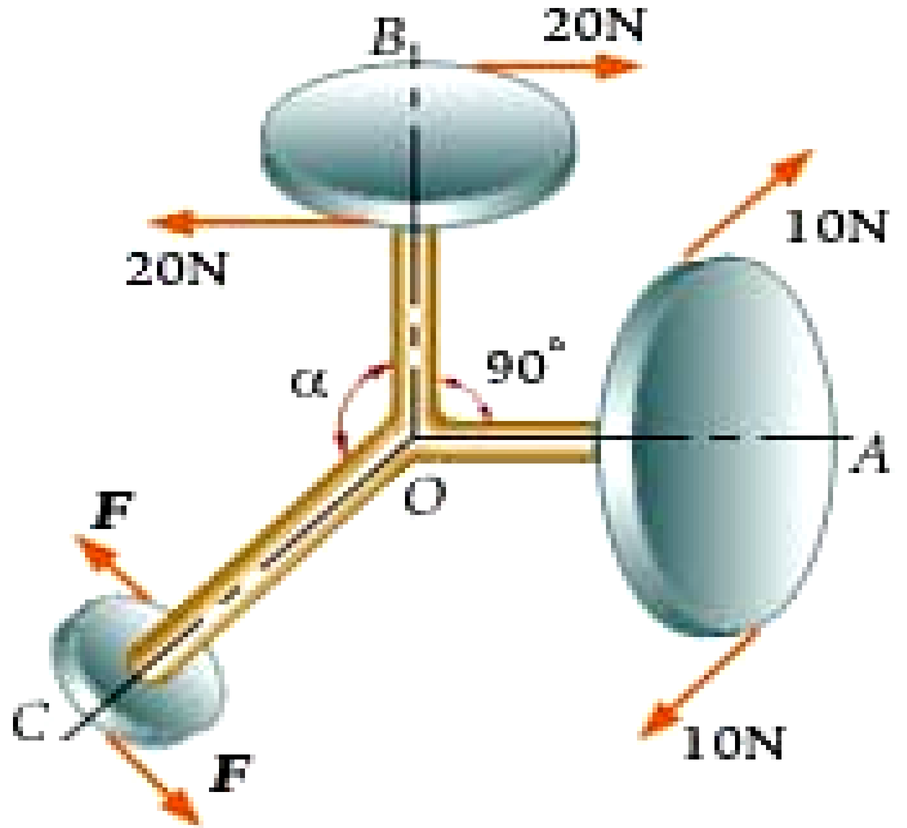
$$M_C = 0.1FN.m$$

$$\sum M_x = 0$$

$$M_C \cos(\alpha - 90^\circ) = M_A$$

$$\sum M_y = 0$$

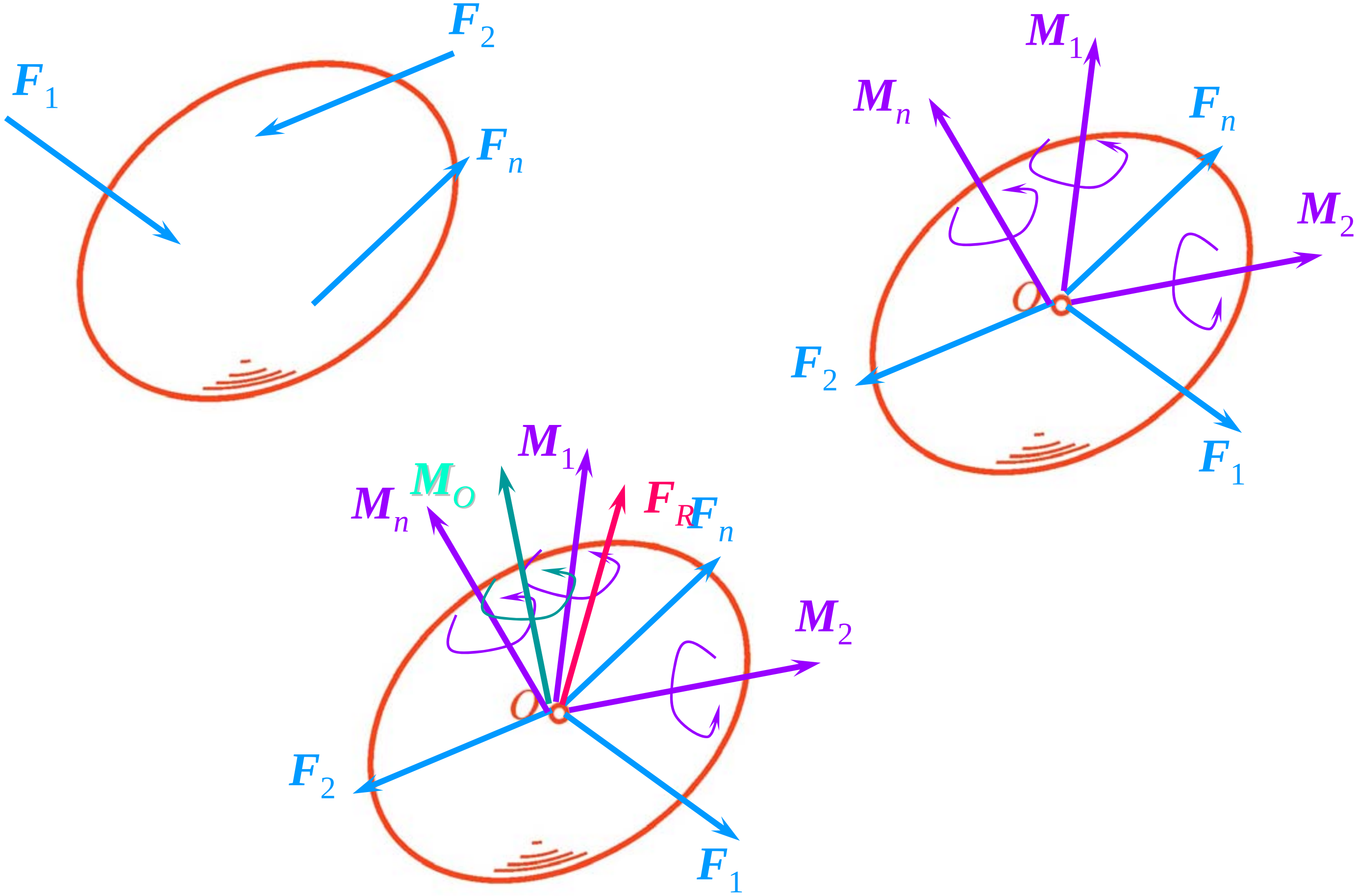
$$M_C \sin(\alpha - 90^\circ) = M_B$$

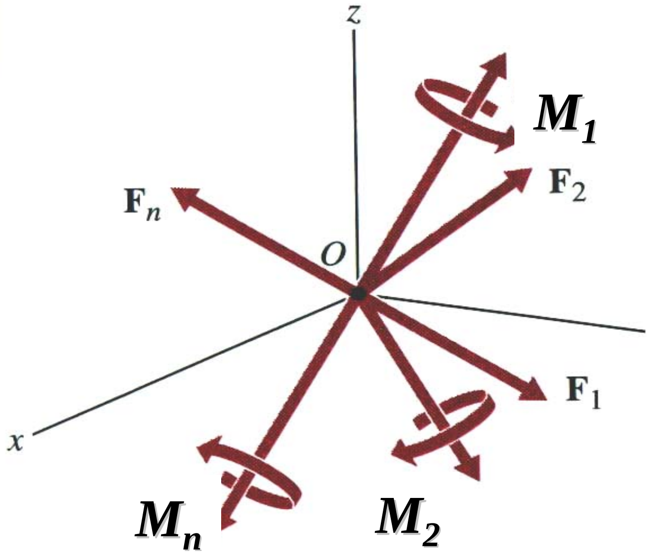



$$F = 50N, \alpha = 143^\circ 8'$$

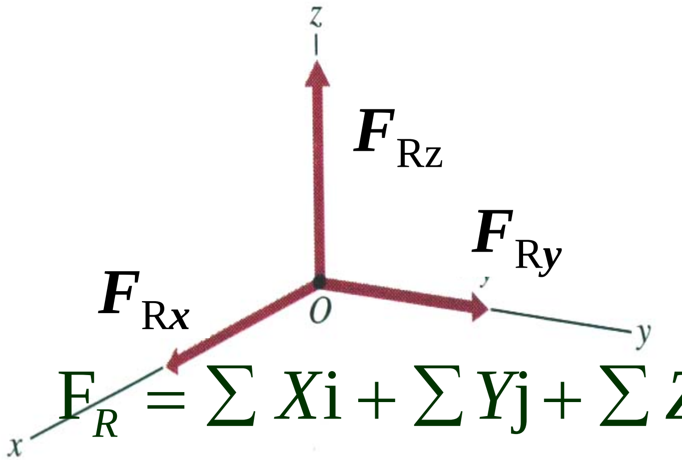
# §4-4 空间任意力系向一点简化

## 1. 空间任意力系向一点简化

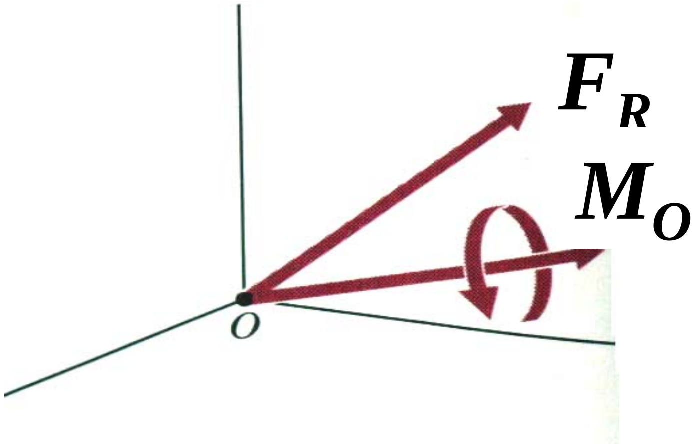


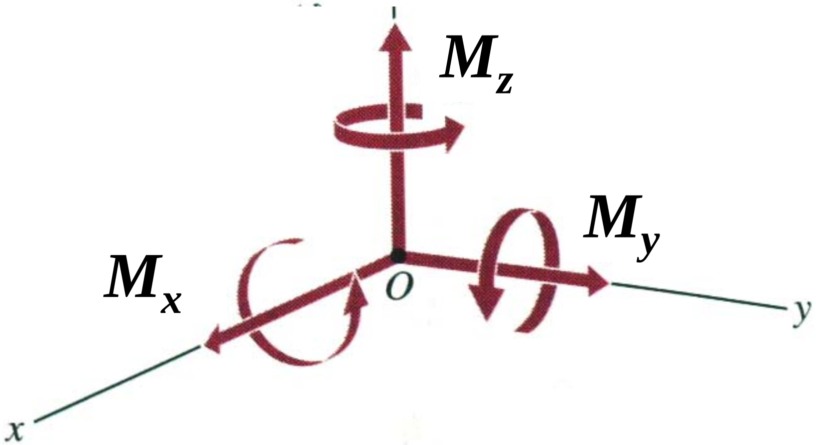


(c)




$$F_R = \sum Xi + \sum Yj + \sum Zk$$




$$M_O = [M_O]_x i + [M_O]_y j + [M_O]_z k$$
$$= \sum M_x(F_i) i + \sum M_y(F_i) j + \sum M_z(F_i) k$$

## 力系主矢的特点：

对于给定的力系，主矢$F_R$唯一；

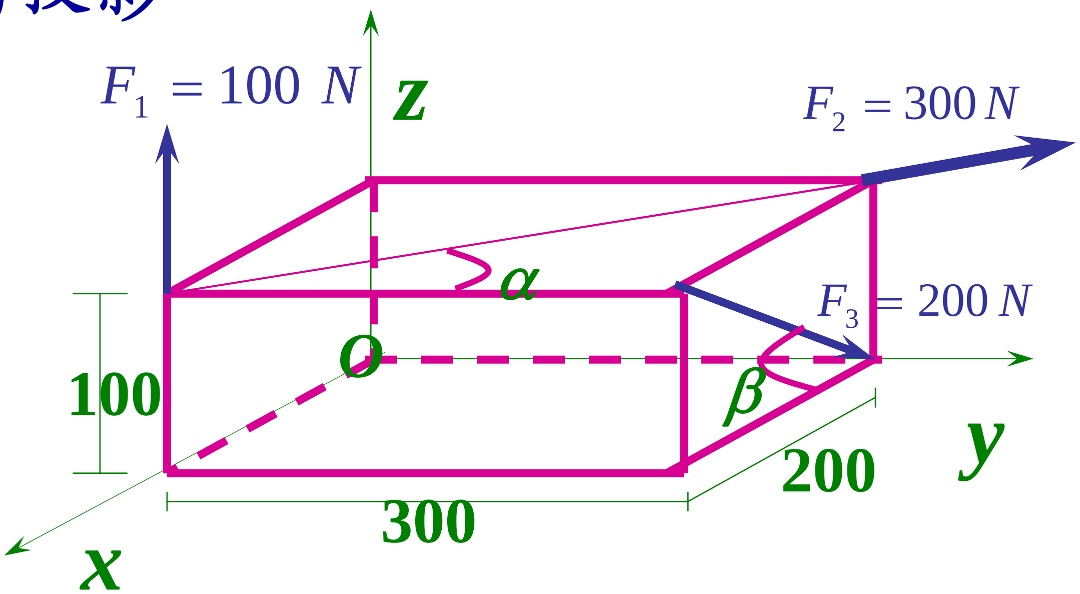
• 主矢$F_R$仅与力系中各力的大小和方向有关，主矢不涉及作用点和作用线，主矢是自由矢。

## 力系主矩的特点：

力系主矩$M_O$与矩心$O$的位置有关；

## 求:力系向O点简化的结果

### 解:力系主矢在轴上的投影




$$F_{RX} = \sum F_x = -F_2\sin\alpha - F_3\cos\beta = -345.4N$$

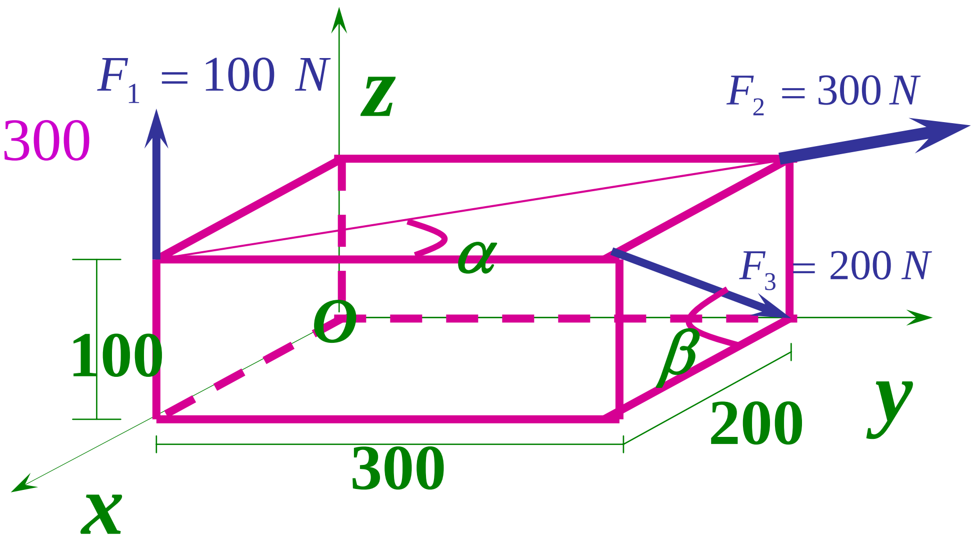
$$F_{RY} = \sum F_y = F_2\cos\alpha = 246.9N$$

$$F_{RZ} = \sum F_z = F_1 - F_3\sin\beta = 10.56N$$

$$\boldsymbol{F}_R = \sum \boldsymbol{F}_x \mathrm{i} + \sum \boldsymbol{F}_y \mathrm{j} + \sum \boldsymbol{F}_z \mathrm{k} = -345.4\mathrm{i} + 246.9\mathrm{j} + 10.56\mathrm{k}(\mathrm{N})$$

# 力系主矩在轴上的投影

$$M_{OX}=\sum M_X(F)$$
$$=-F_2\cos\alpha\cdot 100-F_3\sin\beta\cdot 300$$
$$=-51.78\,N.m$$




$$M_{OY}=\sum M_Y(F)$$
$$=-F_1\cdot 200-F_2\sin\alpha\cdot 100$$
$$=-36.56\,N.m$$

$$M_{OZ}=\sum M_Z(F)=F_2\sin\alpha\cdot 300+F_3\cos\beta\cdot 300=103.6N.m$$

$$\boldsymbol{M}_O=\sum \boldsymbol{M}_X i+\sum \boldsymbol{M}_Y j+\sum \boldsymbol{M}_Z k$$
$$=-51.78\mathrm{i}-36.56\mathrm{j}+103.6\mathrm{k}(\mathrm{N.m})$$

# 力系向某一点(O)简化的几种结果

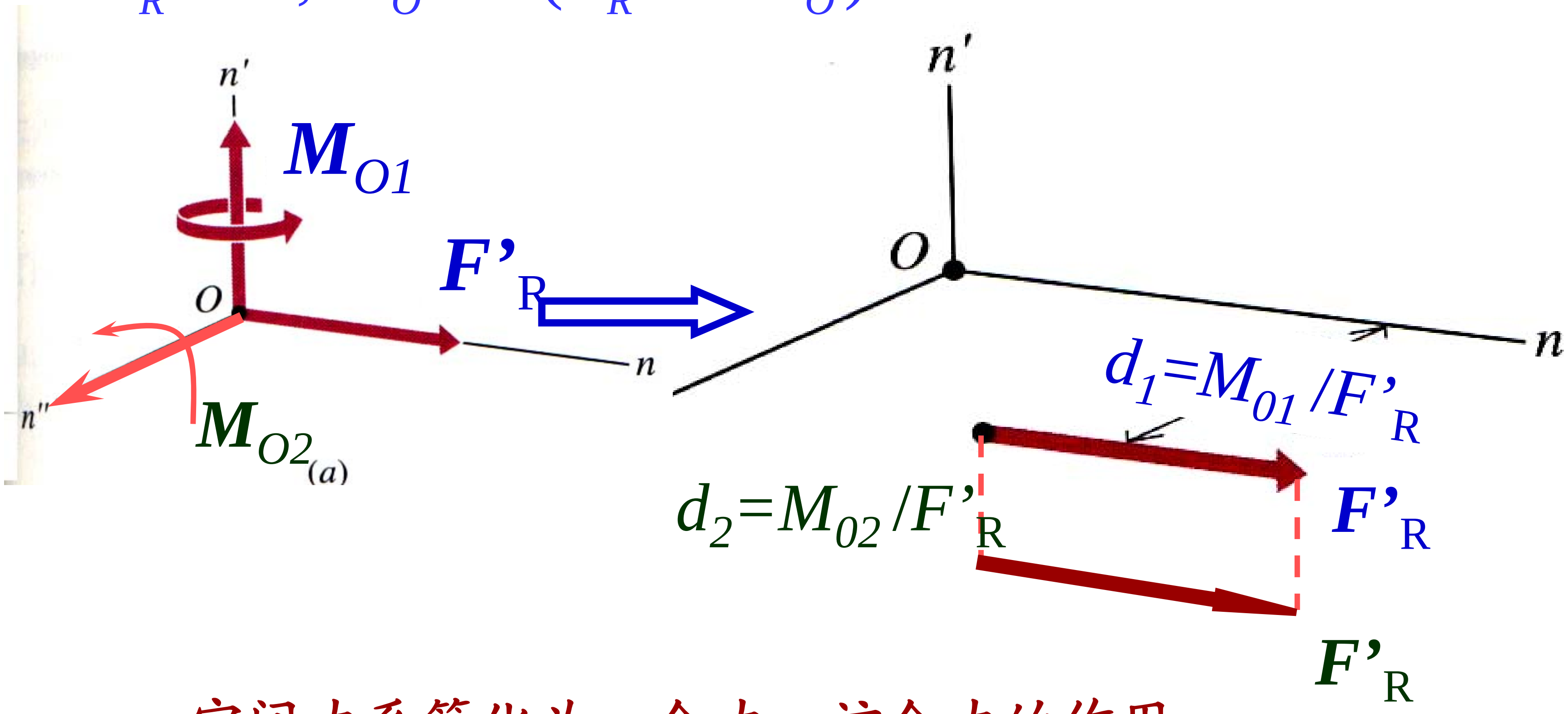
* $F_R' = M_O = 0$ (平衡力系)
* $F_R' = 0, M_O \neq 0$ 合力偶
* $F_R' \neq 0, M_O = 0$ 合 力

空间力系简化为一合力，且该合力的作用线恰好通过所选的简化中心;

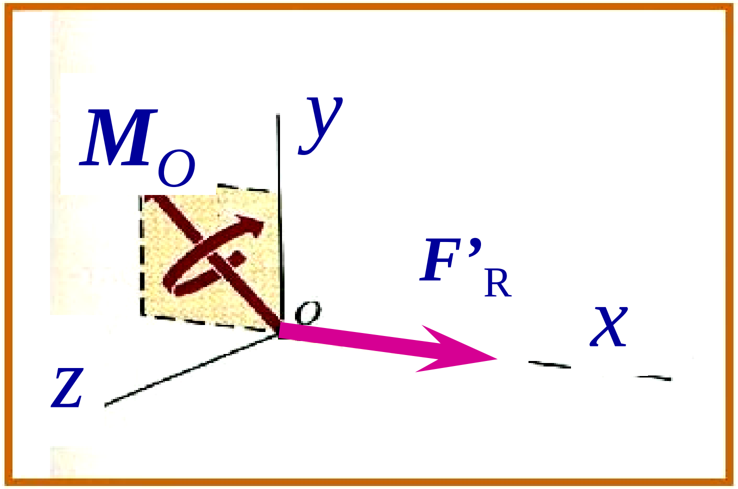
- $F_R' \neq 0, M_O \neq 0 (F_R' \perp M_O)$(还可以再简化为合力)

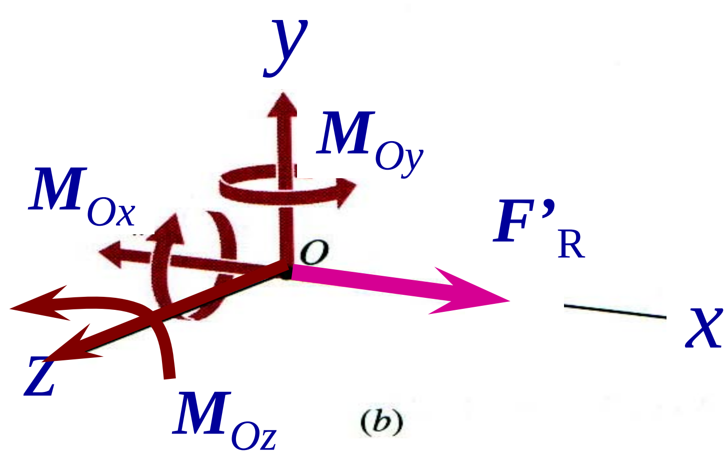
  ($\boldsymbol{F_R} /\!/ \boldsymbol{M_O}$) 力螺旋

$$F_R' \neq 0, M_O \neq 0 (F_R' \perp M_O)$$

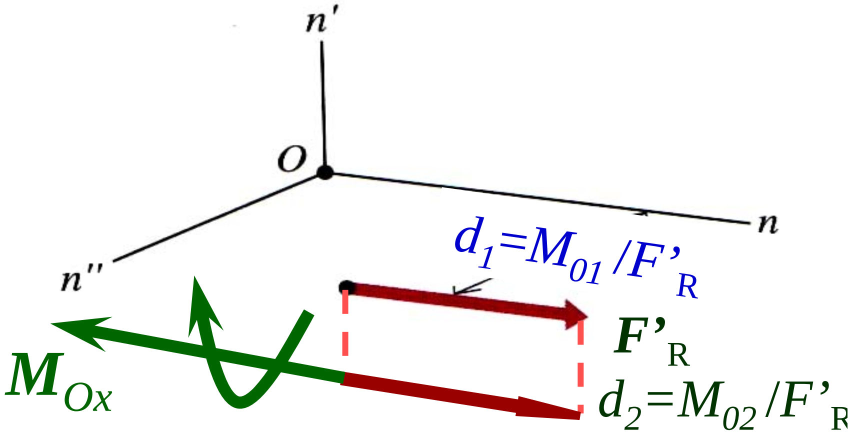



空间力系简化为一合力，该合力的作用线并不通过所选的简化中心;



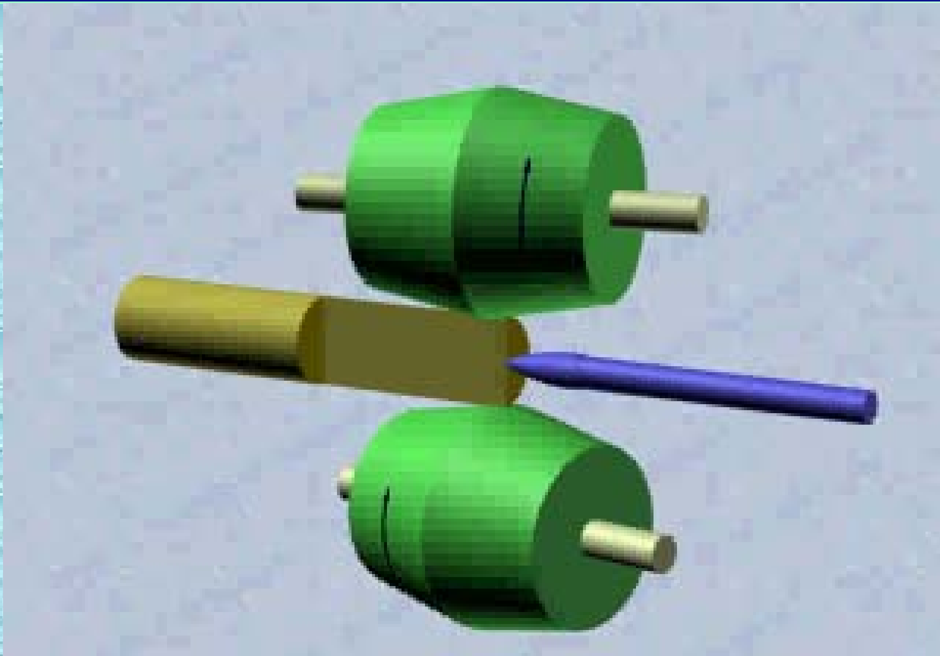



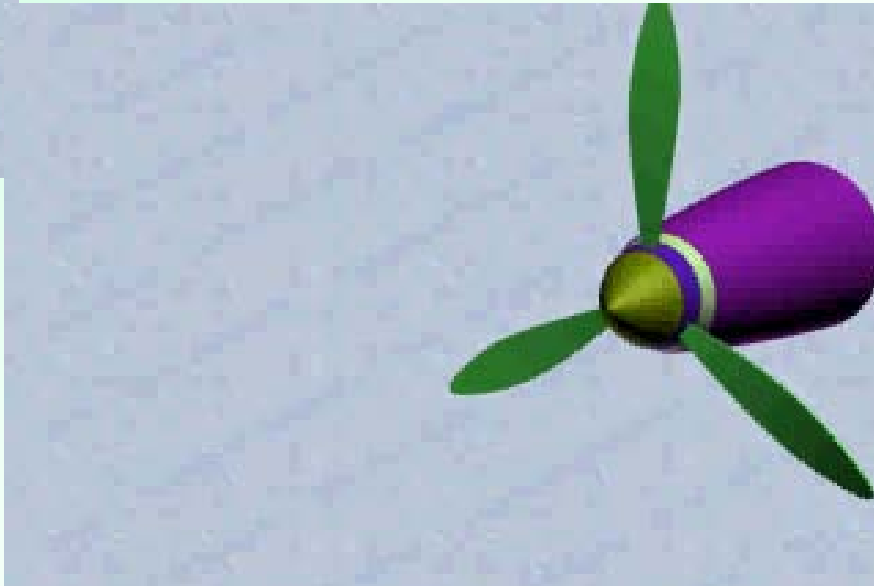

空间力系合成的结果一般是力螺旋




**若$M_{Oy}=0$, $M_{Oz}=0$力螺旋中心轴通过简化中心**

**若$M_{Oy}\neq 0$,$M_{Oz}\neq 0$力螺旋中心轴与简化中心距离为d。**


力螺旋


力螺旋

# §5-5 空间任意力系的平衡方程

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}' = 0 \qquad \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = 0$$

所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零,以及这些力对每一个坐标轴的矩的代数和也等于零

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum M_x(\mathrm{F}) = 0$$

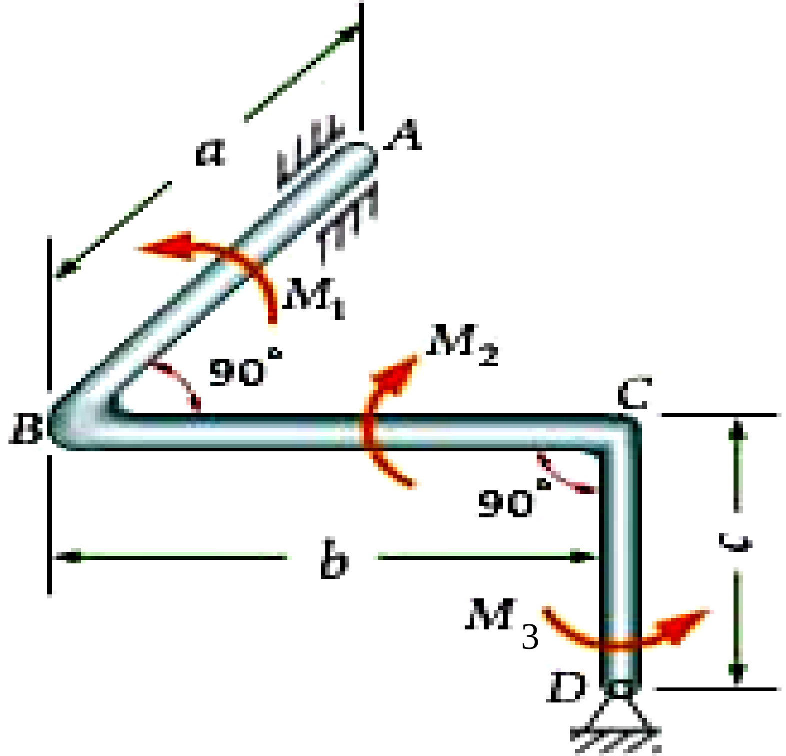
$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_y(\mathrm{F}) = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad \sum M_z(\mathrm{F}) = 0$$

六个方程，求解六个未知数。

## 例题1

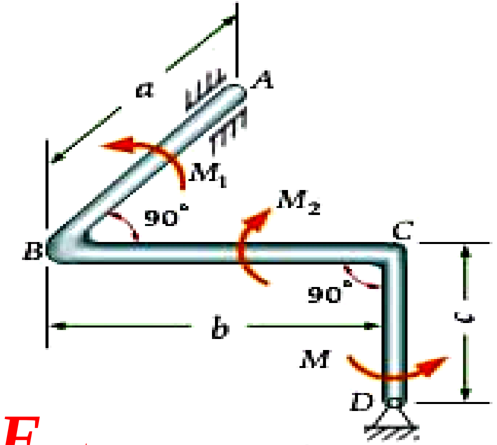
已知：$M_2$、$M_3$，其他条件如图。
求：平衡时$M_1$大小及支座反力。



静力学——空间力系

已知：$M_2$、$M_3$，其他条件如图。

求：平衡时$M_1$大小及支座反力。




$$\sum M_z(F)=0 \qquad M_3-aF_{AY}=0 \qquad F_{AY}=\frac{M_3}{a}$$

$$\sum M_Y(F)=0$$

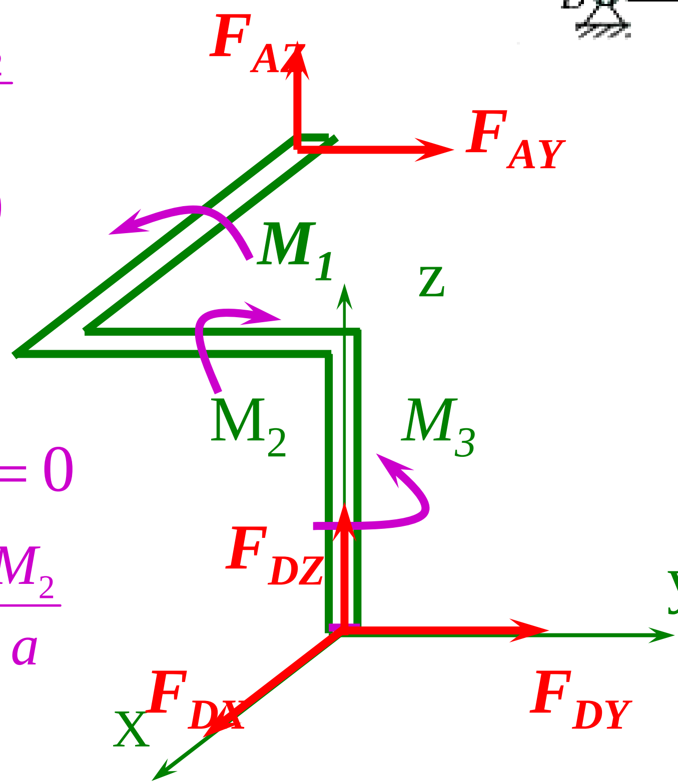
$$-M_2+aF_{AZ}=0 \qquad F_{AZ}=\frac{M_2}{a}$$

$$\sum M_X(F)=0 \qquad M_1-bF_{AZ}-cF_{AY}=0$$

$$M_1=\frac{M_2}{a}b+\frac{M_3}{a}c$$

$$\sum F_x=0 \qquad \sum F_y=0 \qquad \sum F_z=0$$

$$F_{DX}=0 \qquad F_{DY}=-\frac{M_3}{a} \qquad F_{DZ}=-\frac{M_2}{a}$$



# 空间任意力系解题步骤：

1、明确已知和求解；

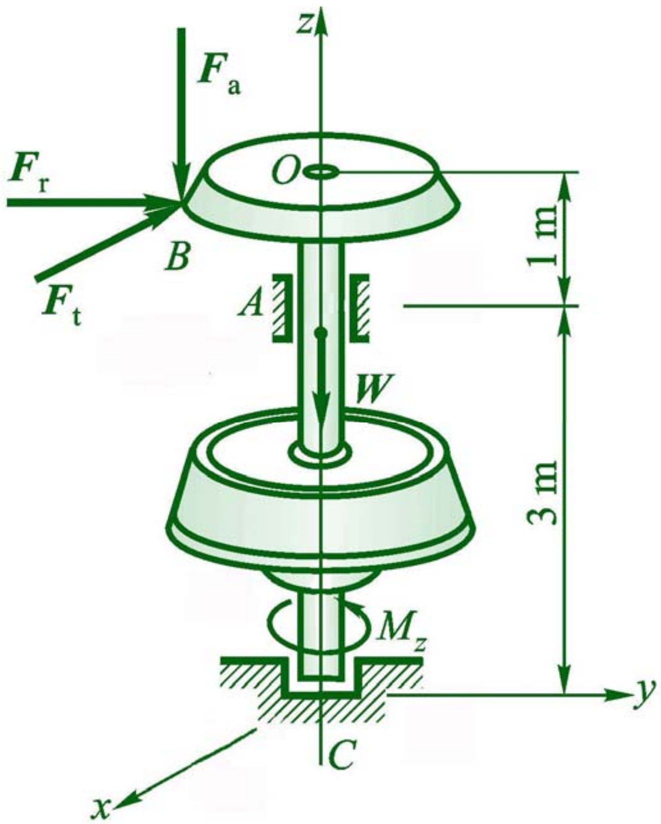
2、选取研究对象，作受力图（画在原图上，便于表现力的空间几何关系）；

3、建立合理的坐标系。为了简洁，力的投影轴尽可能与多数未知力垂直，矩轴尽量与未知力的作用线共面。

4、列平衡方程。正确而熟练地计算力在轴上投影和各力对轴之矩是关键；

5、求解方程，必要时讨论分析结果。

# 例题2




图示为水力涡轮发电机主轴，将锥齿轮*B*处受到的力分解为三个分力：圆周力$F_t$，轴向力$F_a$和径向力$F_r$，三者大小之比为$F_t : F_a : F_r = 1 : 0.32 : 0.17$，已知涡轮连同轴和锥齿轮的总重量为$W$=12kN，其作用线沿轴*Cz*；锥齿轮的平均半径*OB*=0.6m，水力推动涡轮转动的力偶矩$M_z$=1200 N.m。

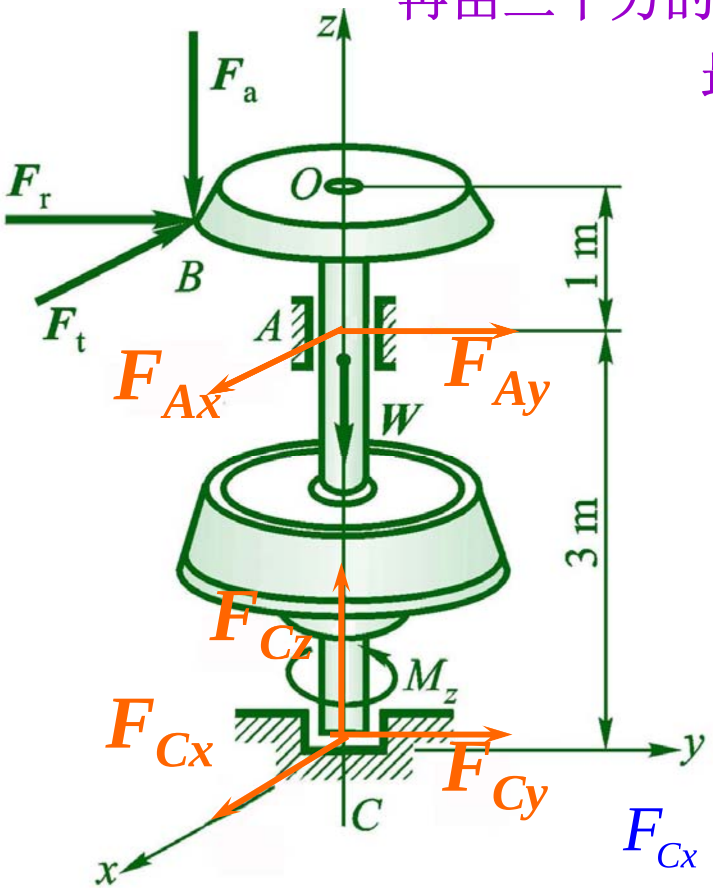
试求：止推轴承*C*和轴承*A*处的约束力。

解： $\sum M_z(\boldsymbol{F})=0$ $\quad M_z - F_t \times OB = 0$

由此解得作用在锥齿轮上的圆周力： $F_t = 2000\ \text{N}$

再由三个力的数值比，得到 $F_a = 640\ \text{N}$ $\quad F_r = 340\ \text{N}$

最后应用空间力系的平衡方程，可以写出




$\sum M_y(\boldsymbol{F})=0$ $\quad 3F_{Ax} - 4F_t = 0$

$\sum M_x(\boldsymbol{F})=0$ $\quad -3F_{Ay} - 4F_r + 0.6F_a = 0$

$\sum F_z = 0$ $\quad F_{CZ} = F_a + W$

$\sum F_y = 0$ $\quad F_{Ay} + F_{Cy} + F_r = 0$

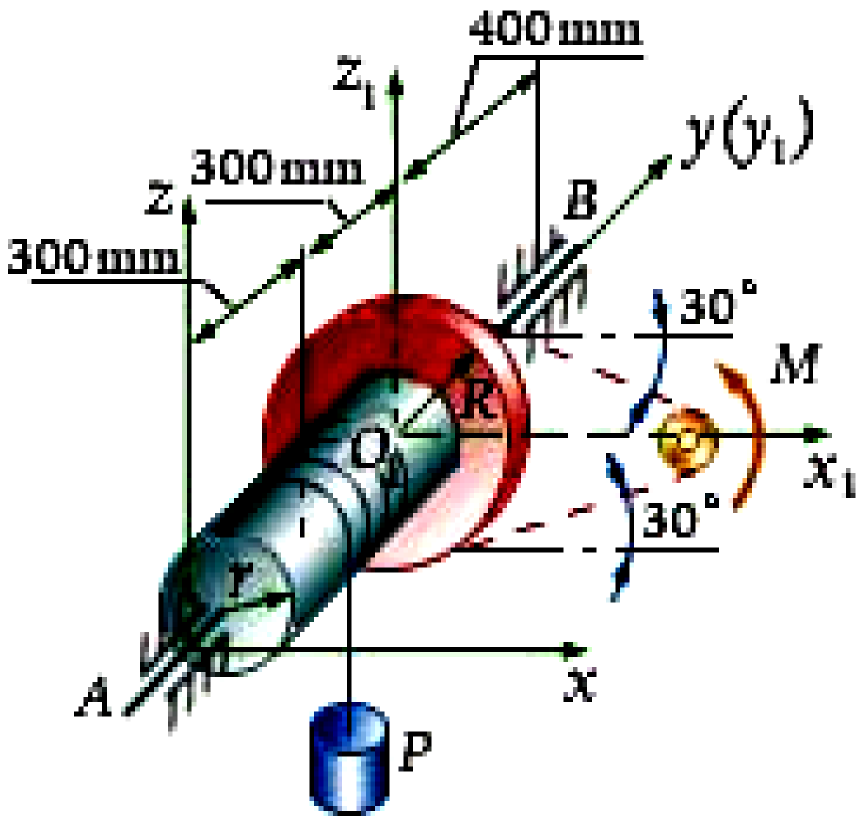
$\sum F_x = 0$ $\quad F_{Ax} + F_{Cx} - F_t = 0$

$F_{Ax} = 2.67\ \text{kN}$ $\quad F_{Ay} = -325\ \text{N}$

$F_{Cx} = -667\ \text{N}$ $\quad F_{Cy} = -14.7\ \text{N}$ $\quad F_{Cz} = 12.6\ \text{kN}$

## 例题3

图示电动机以转矩*M*通过链条传动将重物*P*等速提起，链条与水平线成角$30^0$（直线$O_1x_1$平行与直线*Ax*）。已知：*r*=100mm，*R*=200mm，*P*=10kN，链条主动边（下边）的拉力为从动边拉力的两倍。轴及轮重不计.求支座*A*和*B*的反力以及链条的拉力。



静力学——空间力系

已知：*r*=100mm，*R*=200mm，*P*=10kN，.求支座*A*和*B*的反力以及链条的拉力。

$$\sum M_Y(F)=0 \qquad T_1=2T_2$$

$$(T_1-T_2)\cdot R-P\cdot r=0$$

$$T_1=10kN \quad T_2=5kN$$

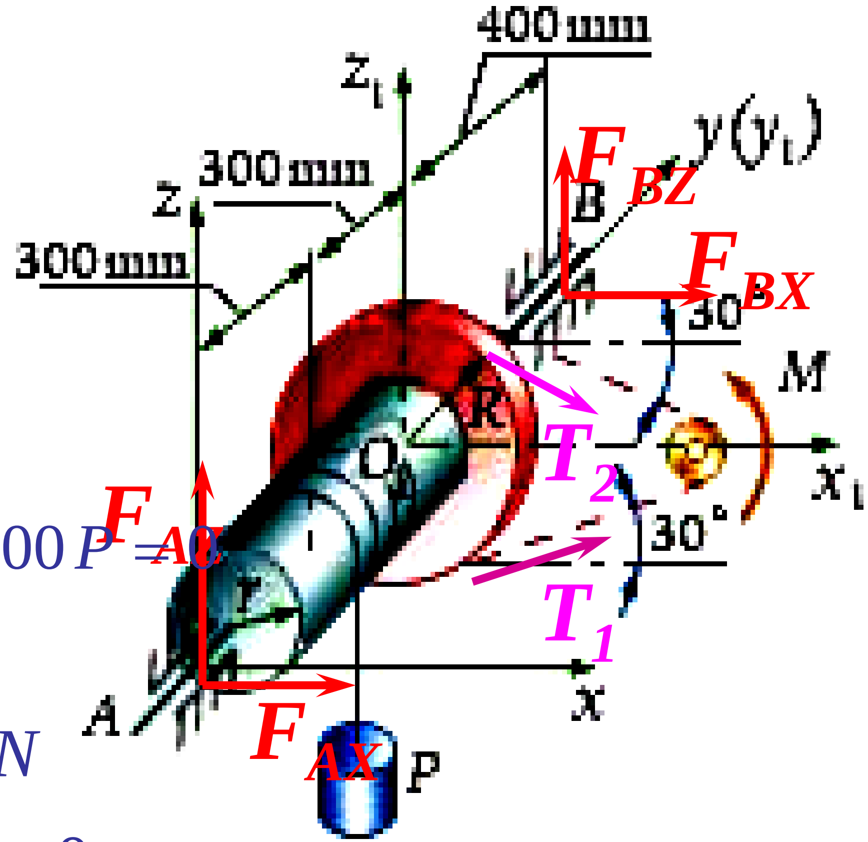
$$\sum M_X(F)=0$$

$$1000F_{BZ}+600(T_1-T_2)\sin 30^\circ-300P=0$$

$$F_{BZ}=1.5kN$$

$$\sum M_Z(F)=0 \qquad F_{BX}=-7.8kN$$

$$-1000F_{BX}-600(T_1-T_2)\cos 30^\circ=0$$



$T_1 = 10kN \quad T_2 = 5kN \qquad F_{BZ} = 1.5kN \qquad F_{BX} = -7.8kN$

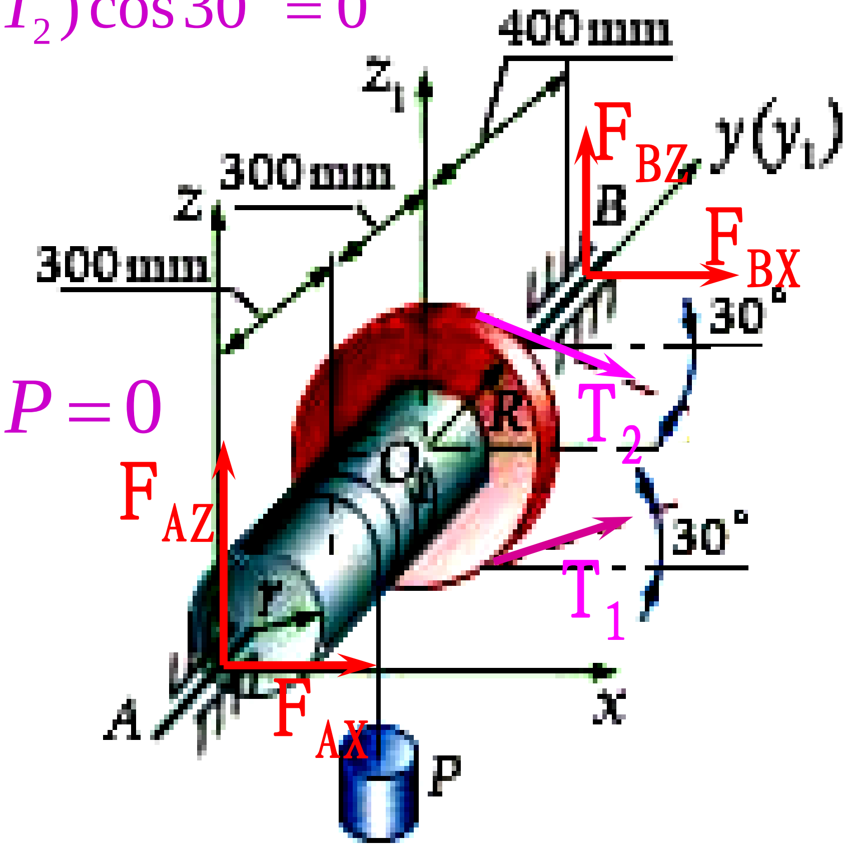
$\sum F_x = 0 \qquad F_{AX} + F_{BX} + (T_1 + T_2)\cos 30^\circ = 0$

$F_{AX} = -5.2kN$

$\sum F_z = 0$

$F_{AZ} + F_{BZ} + (T_1 - T_2)\sin 30^\circ - P = 0$

$F_{AZ} = 6kN$



例题4 求：各杆内力

取板为研究对象

$\sum M_3(F)=0 \qquad F_4=0$

$\sum M_1(F)=0 \qquad F_6=0$

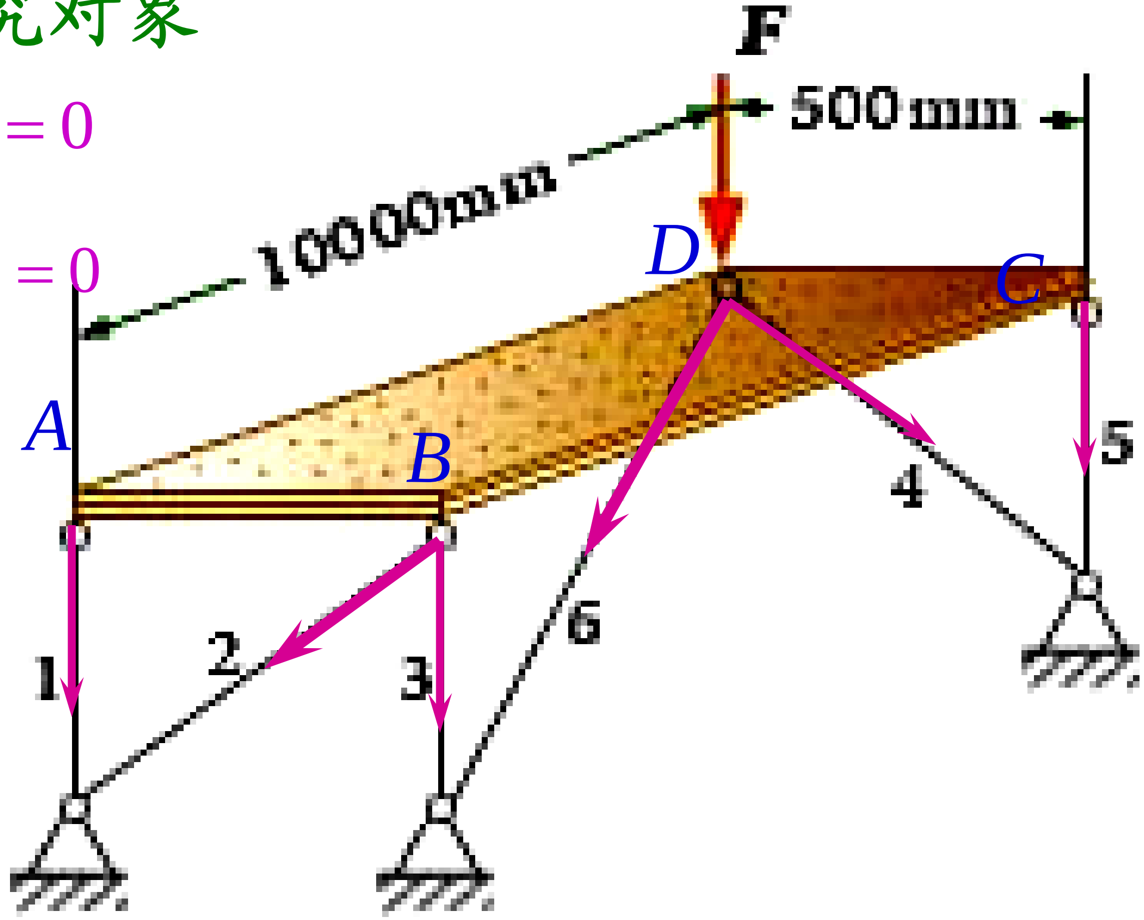
$\sum M_5(F)=0$

$F_2=0$

$\sum M_{AB}(F)=0$

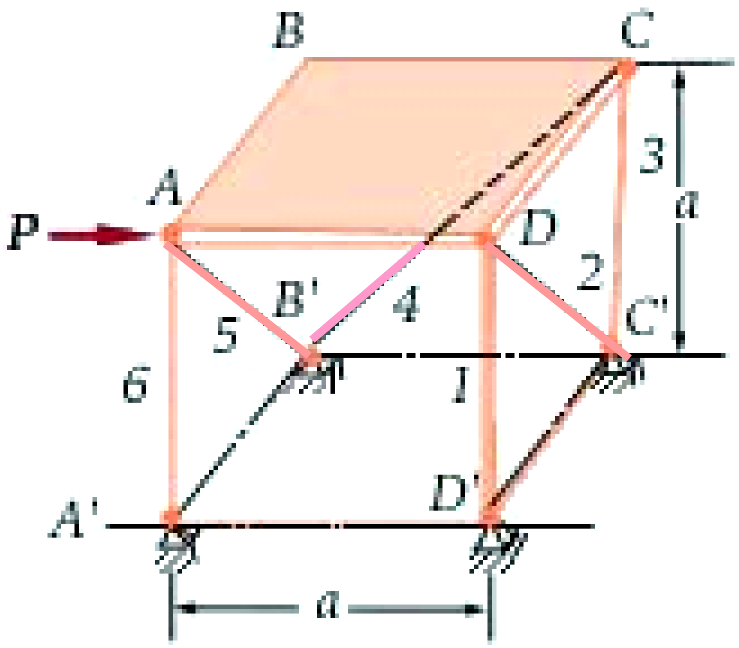
$F\times 10+F_5\times 10=0$

$F_5=-F$(压)




$\sum M_{BC}(F)=0 \quad F_1=-F$(压) $\quad \sum F_y=0 \quad F_3=F$(拉)

例题5　正方形板由六根直杆支撑于水平位置，若在点*A*沿作用水平力*P*，不计板重和杆重，试求各杆的内力。




(a)

取板为研究对象:

空间一般力系有6个方程,尽量使一个方程包含一个未知数

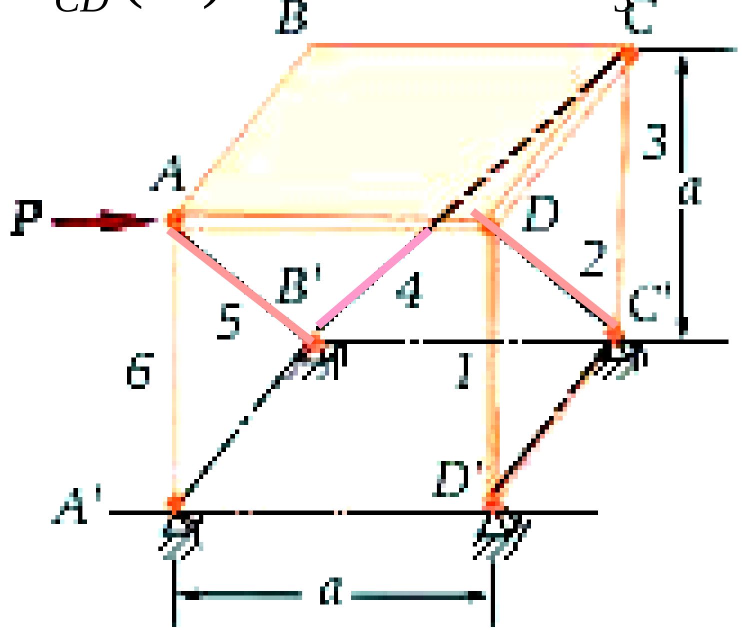
$\sum M_{BB'}(\boldsymbol{F})=0$ $\quad Pa+F_2\cos45^\circ\cdot a=0$ $\quad F_2=-\sqrt{2}P$(压)

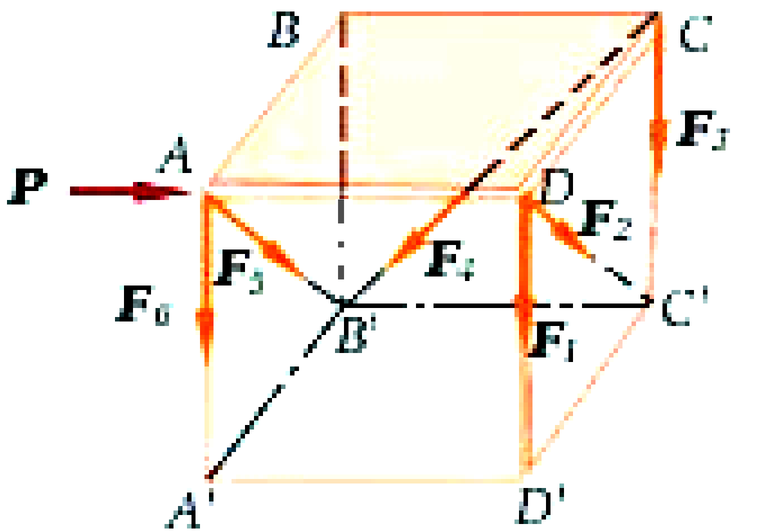
$\sum M_{CC'}(\boldsymbol{F})=0$ $\quad Pa-F_5\cos45^\circ\cdot a=0$ $\quad F_5=\sqrt{2}P$(拉)

$\sum M_{DD'}(\boldsymbol{F})=0$ $\quad F_4\cos45^\circ\cdot a-F_5\cos45^\circ\cdot a=0$ $\quad F_4=\sqrt{2}P$(拉)

$\sum M_{AD}(\boldsymbol{F})=0$ $\quad F_4\cos45^\circ\cdot a+F_3 a=0$ $\quad F_3=-P$(压)

$\sum M_{CD}(\boldsymbol{F})=0$ $\quad F_5\cos45^\circ\cdot a+F_6 a=0$ $\quad F_6=-P$(压)




$\sum M_{B'C'}(\boldsymbol{F})=0$ $\quad F_6 a+F_1 a=0$ $\quad F_1=P$(拉)

## 例题6　等边三角形边长为a，求各杆内力

取板为研究对象

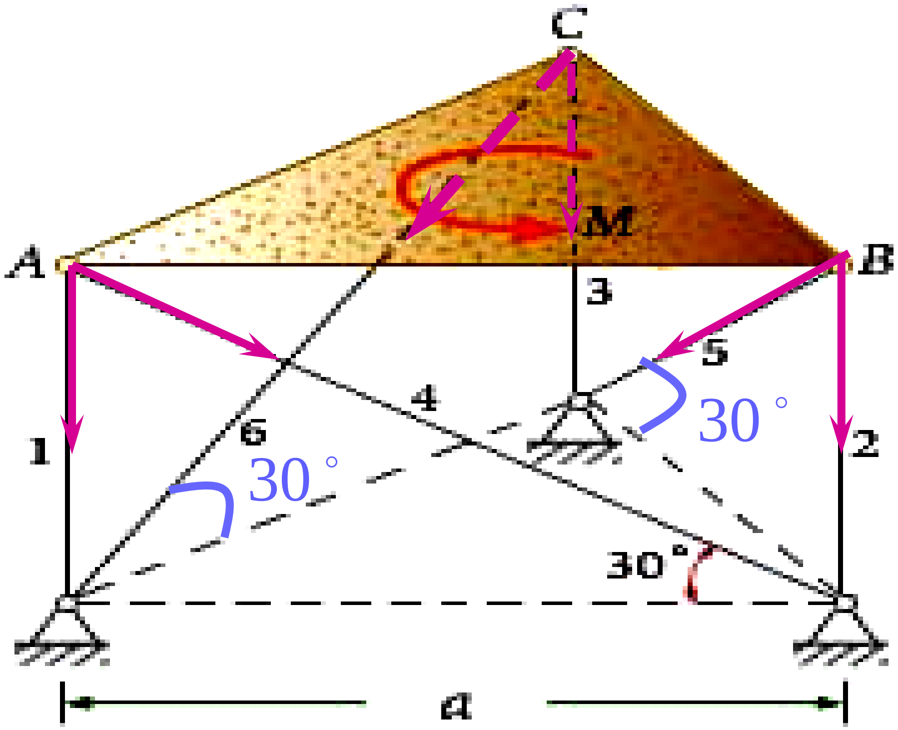
$$\sum M_1(F)=0 \quad F_5\cos 30^\circ \frac{\sqrt{3}}{2}a+M=0 \qquad F_5=-\frac{4M}{3a}(\text{压})$$

$$F_5=F_4=F_6=-\frac{4M}{3a}(\text{压})$$

$$\sum M_{AC}(F)=0$$

$$F_2=-F_5\sin 30^\circ=\frac{2M}{3a}(\text{拉})$$

$$F_2=F_1=F_3=\frac{2M}{3a}(\text{拉})$$



# 本章小结

1.计算力在空间直角坐标轴上的投影有两种方法：一次（直接）投影法和二次（间接）投影法。

2.力对轴之矩是力使物体绕轴转动效果的度量，是代数量。

3. 力对点之矩是力使物体绕该点转动效果的度量，是定位矢量。

$$M_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

4. 力对点之矩在通过该点某轴上的投影等于力对该轴之矩。

$$\left.\begin{aligned}[M_O(\boldsymbol{F})]_x&=M_x(\boldsymbol{F})\\ [M_O(\boldsymbol{F})]_y&=M_y(\boldsymbol{F})\\ [M_O(\boldsymbol{F})]_z&=M_z(\boldsymbol{F})\end{aligned}\right\}$$

# 5. 空间力系平衡方程

所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对每一个坐标轴的矩的代数和也等于零。

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum M_x(\boldsymbol{F}) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_y(\boldsymbol{F}) = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad \sum M_z(\boldsymbol{F}) = 0$$

# 谢谢大家