从动力学角度看力系等效与简化

李俊峰 1)

(清华大学航天航空学院，北京 100084)

摘要 力系等效与简化本质上是动力学问题，但在理论力学教学和教材中习惯于放在刚体静力学部分，并且通常仅限于研究作用在刚体上的力系. 本文从动力学角度研究作用在一般质点系上的力系，将刚体作为质点系的特例，用多种简洁的途径得到理论力学中关于力系等效、力系简化的全部结论. 自 1996 年起在清华大学面向工科院系开设的理论力学课程中进行了教学实践，取得了很好的效果.

关键词 理论力学教学改革，等效力系，力系简化

中图分类号：O313 **文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-16-008

力系等效是指两个力系对质点系产生的运动效应完全相同，这本就应该属于动力学问题. 假设在同一个瞬时有两个不同的力系分别作用在同一个质点系上，使该质点系的质点分别获得的加速度完全相同，根据加速度与速度、位移的关系，则这两个力系使这些质点运动状态 (位移和速度) 分别发生的改变也是完全相同的，即这两个力系对该质点系产生的运动效应完全相同，这两个力系等效. 因此，两个力系等效的充分必要条件就是它们分别使处于同样运动状态的质点系的质点获得同样的加速度.

1 作用在一般质点系上的两个力系等效的充分必要条件

我们以一般的质点系为研究对象，假设两个力系 $\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{F}_1^*,\boldsymbol{F}_2^*,\cdots,\boldsymbol{F}_n^*\}$ 分别作用在质点系的 n 个质点上，其中一些力可以为 0，这两个力系可以包含不一样多的力. 根据达朗贝尔 – 拉格朗日原理 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，如果这两个力系在该质点系任意的相同虚位移上所做的元功相等，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$，那么这两个力系等效. 如果 $\{\boldsymbol{F}_1^*,\boldsymbol{F}_2^*,\cdots,\boldsymbol{F}_n^*\}$ 是零力系，即 $\boldsymbol{F}_i^*=\boldsymbol{0}$，$i=1,2,\cdots,n$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，这正是静力学普遍方程，即虚位移原理 (虚功原理) 的表达式. 或者，根据 Jourdain 变分原理 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}$，如果这两个力系在该质点系任意的相同虚速度上产生的虚功率相等，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\delta\boldsymbol{v}_i$，那么这两个力系等效.

2 作用在刚体上的两个力系等效的充分必要条件

刚体是一种特殊的质点系，从 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$ 或者 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\delta\boldsymbol{v}_i$ 可以推导得到如下定理.

定理：分别作用在同一个刚体上的两个力系 $\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{F}_1^*,\boldsymbol{F}_2^*,\cdots,\boldsymbol{F}_n^*\}$ 等效的充分必要条件是它们的主矢量相等，对相同点的主矩相等.

证明：任选刚体上一点 O 为基点，设刚体的角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，则力 $\boldsymbol{F}_i$ 的作用点的速度为

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i$$

两边进行 Jourdain 变分，可得

$$\delta\boldsymbol{v}_i=\delta\boldsymbol{v}_O+\delta\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i$$

本文于 2016–01–07 收到.

1) E-mail: lijunf@mail.tsinghua.edu.cn

引用格式：李俊峰. 从动力学角度看力系等效与简化. 力学与实践, 2016, 38(1): 78-79

Li Junfeng. Equivalence and reduction of force systems: a dynamical point of view. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(1): 78-79

计算虚功率

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=$$
$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\Big)\cdot\delta\boldsymbol{v}_O+\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\Big)\cdot\delta\boldsymbol{\omega}=$$
$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{M}_O\cdot\delta\boldsymbol{\omega}$$

其中 $\boldsymbol{R}=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$ 和 $\boldsymbol{M}_O=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$ 分别是力系 $\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n\}$ 的主矢量和对 O 点的主矩. 同理，有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=$$
$$(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*)\cdot\delta\boldsymbol{v}_O+\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^*\Big)\cdot\delta\boldsymbol{\omega}=$$
$$\boldsymbol{R}^*\cdot\delta\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{M}_O^*\cdot\delta\boldsymbol{\omega}$$

其中 $\boldsymbol{R}^*=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*$ 和 $\boldsymbol{M}_O^*=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^*$ 分别是力系 $\{\boldsymbol{F}_1^*,\boldsymbol{F}_2^*,\cdots,\boldsymbol{F}_n^*\}$ 的主矢量和对 O 点的主矩. 由 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{v}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\delta\boldsymbol{v}_i$，可得

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^*)\cdot\delta\boldsymbol{v}_O+(\boldsymbol{M}_O-\boldsymbol{M}_O^*)\cdot\delta\boldsymbol{\omega}=0$$

由自由刚体运动的特点可知，$\delta\boldsymbol{v}_O$ 和 $\delta\boldsymbol{\omega}$ 是可以独立任意变化的，于是定理结论得证.

注 1：利用 $\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^*\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$ 证明该定理的过程是完全类似的 [1-2].

注 2：也可以根据牛顿力学中动量定理和动量矩定理，推导出刚体作一般空间运动的动力学方程

$$m\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{J}_C\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J}_C\cdot\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{M}_C$$

再由这组方程以及力系对不同点的主矩之间的关系式

$$\boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{M}_C+\boldsymbol{r}_{OC}\times\boldsymbol{R}$$

同样可以得到上述定理.

注 3：如果 $\{\boldsymbol{F}_1^*,\boldsymbol{F}_2^*,\cdots,\boldsymbol{F}_n^*\}$ 是零力系，即 $\boldsymbol{F}_i^*=\boldsymbol{0}$, $i=1,2,\cdots,n$，则力系等效定理就给出了刚体在一般空间力系作用下的平衡方程.

3 作用在刚体上的力系简化

力系简化是指在力系等效的前提下用简单的新力系代替老力系. 作用在刚体上的任何力系都可以简化成几个最简单的力系之一，即零力系、一个力、力偶、力螺旋. 可以简化为零力系的情形，就得到力系平衡条件，即平衡方程.

作用在刚体上的汇交力系、平行力系、平面力系、力偶系等典型力系，简化的结果如下：

(1) 汇交力系对汇交点的主矩等于零，可以简化为过汇交点的一个力，也可以称为合力. 例如，球铰链的约束是一个分布的汇交力系，汇交点位于球心，可以简化为通过球心的一个力，所以在受力分析中可以当作一个力看待.

(2) 当主矢量不等于零时，平行力系可以简化为一个力，例如，地球对地面上常规尺寸物体的引力可以看作是分布的平行力系，可以简化为通过物体重心的一个力，就是通常人们所理解的重力.

(3) 当主矢量等于零时，平行力系可以简化为零力系或者力偶.

(4) 当主矢量不等于零时，平面力系可以简化为一个力.

(5) 当主矢量等于零时，平面力系可以简化为零力系或者力偶.

(6) 力偶系的主矢量等于零，可以简化为零力系或者力偶.

(7) 作用在刚体上的一般力系，当主矢量与主矩的数量积 (点乘) 不等于零时，可以简化为力螺旋，例如，在拧螺丝时施加在螺丝刀上的力系，就等效为一个力螺旋，使螺丝从静止开始产生螺旋运动.

(8) 当主矢量与主矩的数量积等于零，但主矢量不等于零时，作用在刚体上的一般力系可以简化为一个力；而当主矢量等于零时 (主矢量与主矩的数量积必然也等于零)，作用在刚体上的一般力系可以简化为零力系或者力偶.

参 考 文 献

1 马尔契夫 AП. 理论力学 (第 3 版). 李俊峰译. 北京：高等教育出版社，2006

2 李俊峰，张雄. 理论力学 (第 2 版). 北京：清华大学出版社，2010

(责任编辑：胡 漫)