约束力学系统引入待定乘子的两种方式 1)

丁光涛 2)

(安徽师范大学物理与电子信息学院，安徽芜湖 241000)

摘要 讨论约束力学系统中引入待定乘子两种不同的途径及其对应的物理意义. 一种方式引入待定乘子是处理非独立坐标变更，乘子与约束反力相关；另一种方式是变分原理条件极值要求，乘子与系统的拉格朗日函数相关. 对完整系统由两种途径导出的带乘子运动方程是相同的，但是对非完整系统则分别导出两种不同的运动方程：罗斯方程和维科 (Vacco) 方程.

关键词 完整约束, 非完整约束, 待定乘子, 罗斯方程, 维科方程

中图分类号：O316 **文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-14-354

非完整力学从出现以来，就存在着不同的认知和模型. 20 世纪 90 年代初开始，我国力学界也就此开展了深入的争论，极大地推动了对非完整力学的研究，但是，并没有全面解决问题 [1-4]. 约束是加在力学系统上的限制条件，以数学语言 (等式或不等式) 来表示，但是，应通过一定的物理机制和过程来实现，当然，在建立理论时必然要通过某些理想化处理. 约束系统的运动方程应当包含了这种数学和物理的两方面因素，在导出运动方程的过程中，利用的数学方法和引入的有关假设都与物理 (力学) 条件相关，所以，对约束问题的讨论应当涉及数学和物理两方面. 在建立约束系统，特别是非完整约束系统运动方程时，利用待定乘子是基础性的方法，这里有两种基本方程 —— 罗斯方程和维科 (Vacco) 方程 [1,5-8], 分别代表着两种典型的处理方式. 在研究非完整约束系统运动中如何引入待定乘子，以及不同的方式引入的乘子的物理 (力学) 意义是什么，近年来仍是国内外讨论的热点 [1,9-12]. 通常在数学上引入待定乘子是为了处理非独立的坐标变更，而在讨论其意义时认为待定乘子与约束反力相关；然而，文献 [7,13] 中曾提出一种从力场势能去理解约束的思想，也就是说，待定乘子可能与能量有联系. 我们从新的角度来讨论和分析这两种方式，着重研究变分原理条件极值中引入待定乘子修正系统的拉格朗日函数的方式. 引入待定乘子的这两种方式，在数学上都有规范的程序，但是，建立力学系统理论如何选择应当基于物理 (力学) 考虑. 本文首先在完整约束系统中，研究引入待定乘子的两种标准数学方式，并分析对应的物理意义 [14-15]，这种情况下两种方式引入的待定乘子的物理意义相关联，导出的运动方程相同. 然后，将讨论推广到非完整系统，这时两种方式引入的待定乘子的物理意义存在实质区别，导出罗斯方程和维科方程不同，两种引入待定乘子的方式和两种方程可能与约束实现机制和方式关联.

1 完整系统待定乘子的两种引入方式及其物理意义

1.1 待定乘子和消除不独立坐标变更

设力学系统带有几何约束

$$f_\alpha(x_i,t)=0 \ \ (i=1,2,\cdots,n\,;\ \alpha=1,2,\cdots,s\,;\ s<n) \tag{1}$$

它的拉格朗日函数为

$$L=L(x_i,\dot{x}_i,t) \tag{2}$$

由哈密顿原理

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=0\,,(\delta x_{i1}=\delta x_{i2}=0) \tag{3}$$

可以导出

$$\int_{t_1}^{t_2}-\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}\Big)\delta x_i\mathrm{d}t=0 \tag{4}$$

2014–11–05 收到第 1 稿，2015–04–17 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (11472063).

2) E-mail: dgt695@sina.com

引用格式：丁光涛. 约束力学系统引入待定乘子的两种方式. 力学与实践, 2016, 38(1): 83-86

Ding Guangtao. Two ways to introduce undertermined multipliers to constrained mechanical systems. *Mechanics in Engineering*, 2016, 38(1): 83-86

由于几何约束 (1) 的存在，n 个 δx_i 之间存在下述 s 个关系

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i=0 \tag{5}$$

为了处理非独立坐标变更，引入 s 个待定乘子 λ_α，并由式 (4) 和式 (5) 导出

$$\int_{t_1}^{t_2}-\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}-\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\Big)\delta x_i\mathrm{d}t=0 \tag{6}$$

选择 s 个待定乘子 λ_α 使得不独立的坐标变更前面的系数为 0，而由于其余的坐标变更是独立的任意变更，其前面的系数也必为零，因此从式 (6) 导出下列方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}-\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

约束方程 (1) 的出现，表示给出的描述系统位形的坐标数多于系统的自由度，方程 (7) 通常称为带有多余坐标系统的拉格朗日方程；如果 x_i 选择为系统质点的笛卡尔坐标，式 (7) 就称为第一类拉格朗日方程. 原则上，解方程 (7) 和方程 (1)，可以得到 $n+s$ 个变量 x_i 和 λ_α.

1.2 待定乘子与约束反力的联系

上述引入待定乘子 λ_α 是一种数学方式，而处理的是力学系统的运动，因此必须讨论待定乘子的力学 (物理) 意义. 通常几何约束由物体的光滑接触、刚性连接等机制实现，约束对系统的作用归结为力，即作用在系统质点除了主动力以外，还有约束反力，把这两种力的分量分别记为 F_i, R_i. 哈密顿原理 (13) 成立的条件之一是系统约束是理想的，即

$$R_i\delta x_i=0 \tag{8}$$

式 (5) 中各式分别乘以 λ_α 再对 α 求和，得到

$$\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i=0 \tag{9}$$

比较式 (8) 和式 (9)，可以设定下列关系式

$$R_i=\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \tag{10}$$

这种待定乘子与理想约束反力之间的关系，就是乘子的第一种物理意义.

1.3 待定乘子和变分原理的条件极值

根据变分法理论，带有约束条件 (1) 的力学系统运动方程可以利用条件极值哈密顿原理导出. 引入待定乘子 μ_α，将拉格朗日函数修正为

$$L'=L(x_i,\dot{x}_i,t)+\mu_\alpha f_\alpha(x_i,t) \tag{11}$$

将原理 (3) 推广成带有约束条件的哈密顿原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L'\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}(L+\mu_\alpha f_\alpha)\mathrm{d}t=0 \tag{12}$$

这里 μ_α 是待定的时间函数，展开式 (12)，并利用端点条件可以导出

$$\int_{t_1}^{t_2}\bigg[\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}+\frac{\partial L}{\partial x_i}+\mu_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\Big)\delta x_i+ f_\alpha\delta\mu_\alpha\bigg]\mathrm{d}t=0 \tag{13}$$

式中 n 个 δx_i 和 s 个 $\delta\mu_\alpha$ 都是独立的任意变更，故由上式同时导出运动方程 (7) 和约束方程 (1)(式 (7) 中待定乘子 λ_α 应当改成 μ_α)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}-\mu_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0 \tag{14}$$

1.4 待定乘子和系统能量修正的联系

显然，在数学上引入待定乘子 μ_α 的途径与引入待定乘子 λ_α 的途径是不同的，μ_α 不是为了消除不独立变量变更，而是按照变分法中求条件极值理论的要求，用来修正泛函的被积函数. 为了确定待定乘子 μ_α 的物理意义，研究式 (14) 中与乘子 μ_α 相关项，由于 μ_α 是时间的函数，故可以写成

$$\mu_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=\frac{\partial(\mu_\alpha f_\alpha)}{\partial x_i} \tag{15}$$

考虑到通常力学系统的拉格朗日函数为系统动能与势能之差 $L=T-V$，则式 (11) 可以改写成

$$L'=T-V+\mu_\alpha f_\alpha=T-V' \tag{16}$$

式中

$$V'=V-\mu_\alpha f_\alpha \tag{17}$$

以上关系表示待定乘子与系统约束之间的能量相关，在完整系统中约束方程是坐标和时间的函数，这种能量可以看作与约束相关的 “势能”，这就是乘子 μ_α 的物理意义.

文献 [15] 提出过从能量来理解约束的观点，文献 [7] 也以强吸引梯度的力场来解释曲线约束，事实上物理学中这种思想并不少见，例如，静电学中电荷束缚在导体表面就以电势跃变来说明，分子物理学

中对封闭在刚性容器中的气体分子，器壁可以作为无限高的势垒处理等. 在力学中，力和能量，特别是和势能紧密关联，既然引入与约束相关的反力是通常的处理方式，那么引入式 (17) 所表示的约束对势能的修正也应当能够理解. 这里强调指出，对于完整约束而言，无论用哪种数学方式引入待定乘子，无论是从力的角度还是从能量角度来说明乘子的物理意义，所得到的运动方程形式都是相同的，而且力是势能的负梯度，所以这两种方式引入的乘子的物理意义实质上是相通的. 然而对于推广到与速度相关的运动约束，这种情况将会改变.

2　非完整系统两种引入待定乘子方式

2.1　第 1 种方式和罗斯方程的导出

设力学系统带有非完整约束

$$g_\sigma(x_i,\dot{x}_i,t)=0,\quad (i=1,2,\cdots,n;\ \sigma=1,2,\cdots,r;\ r<n) \tag{18}$$

为简单计算不考虑完整约束. 设系统的拉格朗日函数为式 (2)，仍由哈密顿原理 (3) 导出式 (4)，由于非完整约束 (18) 的存在，使得 n 个 δx_i 不再是彼此独立的任意变化的坐标变更，但是，坐标变更之间的关系不再是式 (5)，而是根据阿贝尔－契塔耶夫定义，由约束条件 (18) 导出 δx_i 之间的下述 r 个关系式

$$\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i=0 \tag{19}$$

这是关于坐标变更独立性的新假设. 引入 r 个待定乘子 λ_σ，由式 (4) 和式 (19) 导出

$$\int_{t_1}^{t_2}-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}-\lambda_\sigma\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i\mathrm{d}t=0 \tag{20}$$

按照导出方程 (7) 的方式，得到下列运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}-\lambda_\sigma\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}=0 \tag{21}$$

这就是罗斯方程 [5-6].

通常也将 $\lambda_\sigma\dfrac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}$ 理解为约束反力，即仍然将待定乘子与约束反力联系起来，然而与式 (10) 比较，其意义不够明确. 虽然阿贝尔－契塔耶夫定义已经得到普遍承认，但是到目前为止仍然存在争议，在约束是线性非完整约束情况下，式 (19) 表示的坐标虚变更的关系，还可以通过引入可能位移得到解释，文献 [11] 也探讨通过新的关于虚位移和速度虚变更的定义，说明在一般的非完整约束情况下契塔耶夫条件的合理性，但是在约束是非线性非完整约束情况下，式 (19) 实质上是一种独立的约定. 将待定乘子 λ_σ 与约束反力联系起来的物理意义并不分明，特别是在约束方程只与速度有关而与坐标无关情况下，例如对速度大小为常量的约束

$$\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2=c^2 \tag{22}$$

就很难理解 $\lambda_\sigma\dfrac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}$ 是约束反力.

2.2　第 2 种方式和维科方程的导出

如果以第 2 种方式引入待定乘子，即引入 r 个待定乘子 μ_σ，修正拉格朗日函数

$$L'=L(x_i,\dot{x}_i,t)+\mu_\sigma g_\sigma(x_i,\dot{x}_i,t) \tag{23}$$

代人条件极值变分原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L'\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}(L+\mu_\sigma g_\sigma)\mathrm{d}t=0 \tag{24}$$

展开并利用端点条件，则得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}+\frac{\partial L}{\partial x_i}-\dot{\mu}_\sigma\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}-\mu_\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}+\mu_\sigma\frac{\partial g_\sigma}{\partial x_i}\Big)\delta x_i+\delta\mu_\sigma g_\sigma\right]\mathrm{d}t=0 \tag{25}$$

仍然仿照从式 (6) 导出式 (7) 的程序，从上式得到 $n+r$ 个方程，前 n 个是维科方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}+\dot{\mu}_\sigma\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}+\mu_\sigma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial g_\sigma}{\partial x_i}\right)=0 \tag{26}$$

而后 r 个方程与 $\delta\mu_\sigma$ 相关，就是约束方程 (18).

式 (13) 和式 (24) 都是条件极值变分原理，前者的约束方程是代数方程，后者是微分方程，分别导出方程 (7) 和方程 (26)，都是按照正常的变分法程序得到的. 方程 (26) 与方程 (21) 之间存在区别，到现在关于这两种方程的争论，并没有平息. 式 (23) 中的 $\mu_\sigma g_\sigma$ 不能再看作势能修正项，对线性非完整约束而言，可以看作广义势的修正项；对式 (22) 类型的只与速度相关的约束，甚至能看作动能修正项；对一般非线性非完整约束而言，只能看作是对拉格朗日函数的修正项. 方程 (26) 中与待定乘子 μ_σ 有关的项为

$$\varPhi_i=\dot{\mu}_\sigma\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}+\mu_\sigma\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g_\sigma}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial g_\sigma}{\partial x_i}\Big) \tag{27}$$

难以将其意义与约束反力直接关联起来，对非线性非完整约束系统，这个展开式中将会出现广义加速度，牛顿力学中的力应当与加速度无关. 但是，与以方程 (21) 表示约束对系统的作用相比，式 (27) 不仅包含更多的与约束相关的信息，而且与待定乘子 μ_σ 的关系也更加复杂.

3 结论和讨论

(1) 在分析力学中引入与约束条件相关的待定乘子有两种典型的数学方式，一种处理约束条件带来的不独立坐标变更问题，另一种是修正作用量泛函，将变分原理变换为条件极值问题. 对完整系统而言，两种方式从不同的方面描述约束对系统的作用，通常认为前一种表示约束反力，后一种从“能量”角度修正系统的拉格朗日函数；这两条不同的途径导出的方程一致，引入的两种待定乘子的物理意义，表面上存在区别，实质上是相互联系的，这是由于力与势能是紧密相关的. 对非完整系统而言，两种引入待定乘子的不同途径得到了不同的运动方程，前一条途径得到罗斯方程，后一条途径得到维科方程，在一般情况下，这两种方程不能等价；对应地，引入的两种待定乘子的物理意义也存在本质上的区别，而且不能简单地与约束反力、能量等直接相关.

(2) 对非完整系统两种引入待定乘子方式和导出的两种不同的运动方程，不能简单地选择一种，排斥另一种，它们不是相互对立的，而是相互补充的，这里可能与实现非完整约束的物理方式和机制的多样性有关. 经典非完整约束是通过接触、摩擦来实现的，如冰刀、滚球、滚盘、三轮桌台等等，这些基本上是线性非完整约束，在物理机制上可以明显体现为力的作用，这种约束对系统运动的影响利用第 1 种方式处理也许是适合的. 然而，随着社会实践发展和工程技术进步，许多非线性非完整约束条件被提出来，且新的约束实现方式和机制也对应出现，例如可以通过传感、反馈、调节等实现对系统运动的控制. 在后一种情况下也许是以第 2 种方式表示约束对系统的作用更为适合，利用维科方程更加符合实际，当然，这个问题应当继续深入研究. 此外，对于这些新型物理方式实现的约束与传统方式实现的非完整约束，是否应当在约束分类上加以区别也值得研究. 20 世纪 90 年代我国力学学者关于非完整力学的大讨论，得到阿贝尔 – 契塔耶夫模型和维科模型并非二选一问题的结论 [1]，可能开辟了进一步研究的道路.

综上所述，两种模型的分歧表明研究非完整约束本质上是物理 (力学) 问题，不能只从数学方面讨论，而应当重视分析实现约束的原理和机制，同一个约束方程表示的约束，由于实现机制不同，也许要求用不同的模型来处理. 此外，除了上述两种基本模型外，是否还有新的数学模式来处理非完整系统运动，也应当继续进行探讨.

参 考 文 献

1 罗绍凯, 张永发. 约束系统动力学研究进展. 北京：科学出版社, 2008

2 梁立孚. 非完整系统动力学的 Vaconomic 模型和 Chetaev 模型. 力学进展, 2000, 30(3): 358-369

3 郭仲衡, 高普云. 关于经典非完整力学. 力学学报，1990, 22(2): 185-190

4 陈滨. 关于非完整力学的一个争议. 力学学报, 1991, 23(3): 379-384

5 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京：北京工业学院出版社, 1985

6 Mei FX, Wu HB. Dynamics of Constrained Mechanical Systems. 北京：北京理工大学出版社, 2009

7 陈滨. 分析动力学 (第 2 版). 北京：北京大学出版社，2012

8 Arnold VI, Kozlov VV, Neishtadt AI. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics (3rd edn). 北京：科学出版社, 2009

9 梁立孚, 胡海昌, 陈德民. 非完整系统动力学的 Lagrange 理论框架. 中国科学 G 辑, 2007, 37(1)：76-88

10 郭永新, 赵喆, 刘世兴等. 非完整系统 Chetaev 动力学和 Vaconomic 动力学的等价条件. 物理学报, 2006, 55(8)：3838-3844

11 Flannery MR. The elusive d'Alembert-Lagrange dynamics of nonholonomic systems. *American Journal of Physics*, 2011, 79(9)：932-944

12 Christofer C, Raite T. On nonholonomic systems and variational principle. *Journal of Mathematical Physics*, 2009, 50(1)：042901

13 Arnold VI . Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978

14 苏云荪. 理论力学. 北京：高等教育出版社, 1990

15 Goldstein H, Poole C, Safko J. Classical Mechanics (3rd edn). 北京：高等教育出版社, 2005

(责任编辑：刘希国)