§5　带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用

学习主要内容

电磁质量；

辐射阻尼。

复习

库仑场的能量；

辐射功率。

§5　带电粒子的电磁场对粒子本身的反作用

电荷和电磁场是相互作用的，一方面电荷激发电磁场，另一方面电磁场又对电荷有反作用。

要完全解决电荷与电磁场系统的动力学问题，必须把两者之间的相互作用同时考虑，才能解出粒子的运动以及电磁场。

1、电磁质量

任意运动带电粒子的电磁场包括两个部分

一部分：是存在于粒子附近的场，当粒子静止时它就是库仑场，当粒子运动时它和速度有关，可由库仑场作洛伦兹变换而得。这部分的特点是场量与 r^2成反比，其能量主要分布于粒子附近，因此称为粒子的自场。

另一部分：当粒子加速时激发的辐射场。这部分的特点之一是场量与r成反比，其能量可以辐射到任意远处。

为了求出粒子的电磁质量，需计算一个静止粒子的库仑场的总能量。

库仑场的总能量依赖于粒子内部的电荷分布，不同的电荷分布有不同的总能量，但对一定大小的带电粒子来说，其数量级是相同的。为简单起见，假设粒子的电荷分布于半径为r_e的球面上。库仑场能量为

$$W=\int\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\mathrm{d}V=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r_e}^{\infty}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e}$$

由相对论质能关系，电磁质量为

$$m_{em} = \frac{W}{c^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e c^2}$$

电磁质量m_{em}包括在测量出的电子质量m之内。电子质量除了电磁质量之外还可能有其他来源。以m_0表示非电磁起源的质量，则电子质量m为

$$m = m_0 + m_{em}$$

数量级估计：如果电子质量有显著的部分是来自电磁质量，则

$$m \approx \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e c^2}$$

通常定义经典电子半径为

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 2.81794092(38)\times 10^{-15}\ \text{m}$$

注意：在这线度内经典电动力学已不适用，因而上面用经典模型描绘的电子结构图象不可能是正确的。

虽然经典电动力学不能正确地描述电子的内部结构，但是电磁质量的概念在量子理论中仍然是重要的。在电子质量中，很可能有不小的一部分属于电磁质量。

但是，在目前量子理论仍然未能计算出电子的电磁质量。

2．辐射阻尼

以F_e代表外力，F_s代表粒子激发的场对粒子本身的反作用力，则粒子的运动方程应为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(m\dot{v}\right)=F_e+F_s$$

低速情形、当粒子有加速度a时，辐射功率为

$$P=\frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

由于有能量辐射，使粒子受到阻尼力F_s，阻尼力对粒子所作的负功率应等于辐射功率，因此

$$\vec{F}_s \cdot \dot{v} = -\frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

粒子作准周期运动情形，当粒子运动一周后，粒子附近的场回到原状态，因此这时阻尼力所作的负功等于辐射出去的能量，即上式对一周期积分是成立的。设周期为T，有

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \boldsymbol{F}_s \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\Big|_{t_0}^{t_0+T} + \int_{t_0}^{t_0+T}\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

当粒子运动一周后，v和a回到原值，因而上式右边第一项为零。因此，对一周期平均效应而言，可取

$$\vec{F}_s = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\vec{v}}$$

F_s称为粒子的自作用力。由推导过程可知，上式不是对每一瞬时成立的公式，它只代表一种平均效应。

带电粒子激发的电磁场对粒子本身的反作用可以分为两部分。

一部分表现为电子的电磁质量，其效果已经包括在测量出的电子质量m之内，因而在具体计算中不必再考虑它。

另一部分是辐射阻尼力，这部分是可观测的自作用力，在研究带电粒子运动时应把这种自作用力考虑在内。

3. 谱线的自然宽度

经典振子辐射出一定频率的电磁波。设振子在x轴上运动，弹性恢复力为$-kx$，则振子运动方程为

$$m\ddot{x}+\kappa x=F_s$$

令$k/m=\omega_0^2$，并把自作用力代入上式

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}\dddot{x}$$

在原子辐射情形，自作用力比起弹性力是很小的（下面再具体验证这一点）。先忽略自作用力，得谐振子运动方程

$$\ddot{x}+\omega_0{}^2 x=0$$

其解为

$$x=x_0 e^{-i\omega_0 t}$$

ω_0为振子的固有频率，x_0为振幅。

加入阻尼力，得阻尼振子的运动方程：

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0{}^2x=0$$

$$\gamma=\frac{e^2\omega_0{}^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}$$

$$x = x_0 e^{-i\omega_0 t}$$

$$\ddot{\omega} + i\gamma\omega - \omega_0^{\ 2} = 0$$

当$\gamma << \omega_0$时有

$$\omega \approx \omega_0 - \frac{i}{2}\gamma$$

阻尼振子解：

$$x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}$$

在上面的解法中，阻尼力作为微扰来处理，这只有在阻尼力远小于弹性恢复力的情形下才适用，即要求满足条件$\gamma \ll \omega_0$。此条件可写为$r_e \omega_0 / c \ll 1$，或

$$r_e \ll \lambda/2\pi$$

其中λ为辐射波长。由于 r_e~$10^{-15}m$，而对原子辐射来说，λ~$10^{-7}\ m$，因此条件总是满足的。

由于振子振幅衰减，它所辐射出的电磁波也不断减弱。设振子于某时刻开始激发，则在空间某点上观察到的电场强度为

$$E(t)=\begin{cases} E_0 e^{-\frac{1}{2}\gamma t} e^{-i\omega_0 t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

式中 t=0代表最初激发的电磁波传至该点的时刻。上式不是纯正弦波，用频谱分析可以把它分解为不同频率正弦波的叠加。

$E(t)$的傅里叶变换为

$$E_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\infty} E_0 e^{-\frac{1}{2}\gamma t} e^{-i(\omega-\omega_0)t}\,\mathrm{d}t$$

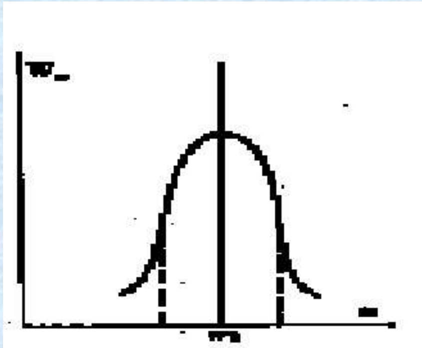
$$= \frac{E_0}{2\pi i}\frac{1}{\omega-\omega_0+i\frac{\gamma}{2}}$$

单位频率间隔的辐射能量正比于$|E_\omega|^2$，即

$$W_\omega \propto \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\gamma^2}{4}}$$

总辐射能量

$$W_\omega = \frac{W}{2\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\gamma^2}{4}}$$



谱线宽度用波长λ表为

$$\Delta\lambda = \left|\Delta\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)\right| = \frac{2\pi c}{\omega_0{}^2}\Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0{}^2}\gamma$$

$$\Delta\lambda = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 mc^2} \approx 1.2\times10^{-5}\ \text{nm}$$

结果说明

作业：273页6题