

## 高精度有限体积格式在三维曲线坐标系下的应用\*

徐丹<sup>1</sup>, 王东方<sup>1</sup>, 陈亚铭<sup>2</sup>, 邓小刚<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学 航天科学与工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**为了构造在光滑区具有较高分辨率并且可以无振荡捕捉激波的高精度有限体积格式,同时降低格式在模板选择上遇到的困难,基于逐维重构方法,发展了结构网格下的高精度有限体积格式,并将这一格式推广到三维曲线坐标系下,从而可以适应相对复杂外形下的计算。为充分验证格式的有效性,选取一系列典型算例进行计算:在等熵涡输运和二维喷管流动中验证了格式的精度可以达到设计精度;在双马赫反射问题中格式也表现出良好的捕捉激波的能力。数值计算表明,上述格式在曲线网格上具有较高的数值精度和鲁棒的激波捕捉能力,适用于流体力学方程的计算。

**关键词:**有限体积方法;高精度格式;曲线坐标系;逐维重构方法

中图分类号:V211.3 文献标志码:A 文章编号:1001-2486(2016)02-056-05

## High-order finite volume schemes in three-dimensional curvilinear coordinate system

XU Dan<sup>1</sup>, WANG Dongfang<sup>1</sup>, CHEN Yaming<sup>2</sup>, DENG Xiaogang<sup>1</sup>

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** In order to develop a high-order finite volume scheme, which can perform with high fidelity in smooth regions, capture the discontinuities without oscillation, and overcome the difficulty in choosing stencils, a high-order finite volume scheme on structure meshes was developed on the basis of dimension-by-dimension reconstruction method. The scheme was also extended to the three-dimensional curvilinear coordinate system, which was suitable for the computation under relatively complex configurations. In order to validate the numerical scheme, some test cases were used. In the cases of the isentropic vortex and two-dimensional channel flow, it was found that the designed order of accuracy could be achieved. In the double Mach problem, it was proved that the scheme could well capture the discontinuities. The test cases show that the scheme has high numerical accuracy and robust capturing ability on curvilinear meshes and high efficiency in the simulations of the computational fluids dynamics.

**Key words:** finite volume method; high-order scheme; curvilinear coordinate system; dimension-by-dimension reconstruction method

凭借良好的数值特性和稳定性,有限体积方法被广泛应用于计算流体动力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)研究,并被大部分商业软件采用。但是基于此方法的大部分应用和软件都仅限于2阶精度<sup>[1]</sup>,而随着计算气动声学、大涡模拟、直接数值模拟应用的兴起,高精度格式成为发展趋势。

对于有限体积方法,高精度格式主要依赖于有效无振荡(Essentially Non-Oscillatory, ENO)和加权有效无振荡(Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO)的重构方法。Abgrall<sup>[2]</sup>, Harten 和 Chakravarthy<sup>[3]</sup>, Sonar<sup>[4]</sup>分别将 ENO 应用于非结

构网格下的有限体积方法。将 ENO 选择最光滑模板的方法发展为不同模板的非线性加权是 WENO 格式的基本构造思想。Friedrich<sup>[5]</sup>最早将 WENO 应用于非结构网格,但是没有实现最优化,这一工作由 Shu 等<sup>[6]</sup>完成。Tsoutsanis 等<sup>[7]</sup>则在三维非结构网格的基础上,研究了任意混合网格的计算方法。最近 Groth 等<sup>[8]</sup>发展了一种同样基于光滑度测试的中心有效无振荡(Central Essentially Non-Oscillatory, CENO)格式,并分别用于结构、非结构网格。尽管 CENO 格式中并没有涉及多模板选择,但仍因其具有 ENO 特性而命名。

\* 收稿日期:2015-09-19

基金项目:国防科学技术大学科研计划资助项目(ZDYYJCYJ20140101)

作者简介:徐丹(1987—),男,山东威海人,博士研究生,E-mail:13786146863@163.com;

邓小刚(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail:xgdeng2000@vip.sina.com

尽管基于 ENO/WENO 发展了众多的高阶有限体积算法,但是直接在物理空间上执行,特别是在非结构网格上,仍存在较大的问题,尤其是在高阶多维重构中存在模板选择困难,这将严重增加算法和代码的复杂性,并消耗大量的 CPU 和内存资源,从而无法应用于实际问题的计算。为解决这一问题,一个有效的方法就是在曲线网格下执行有限体积方法。此时需要使用结构网格,尽管灵活性会受到一定的影响,但是可以使用标准的多维重构方法,从而有效降低对计算机内存和 CPU 的要求。Casper 等<sup>[9]</sup>较早讨论了将高阶 ENO 格式应用于结构网格的方法,并详细讨论了有限体积下的多维重构。Titarev 和 Toro<sup>[10]</sup>给出了三维条件下的多维重构方法,但仅限于笛卡尔网格。

为进一步提高高精度有限体积方法的使用范围,将基于逐维重构的高精度有限体积格式推广到曲线坐标系,使格式在保持较高精度和激波捕捉能力的基础上,适应相对复杂外形下的计算。通过数值算例,验证格式的精度和对流场间断的分辨能力。

## 1 曲线坐标系下的有限体积方法

考虑三维条件下的双曲守恒系统:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

经过坐标变换  $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$  可得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{J} \right) + \left( \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (2)$$

式中:

$$\begin{cases} \hat{E} = \hat{\xi}_x E + \hat{\xi}_y F + \hat{\xi}_z G \\ \hat{F} = \hat{\eta}_x E + \hat{\eta}_y F + \hat{\eta}_z G \\ \hat{G} = \hat{\zeta}_x E + \hat{\zeta}_y F + \hat{\zeta}_z G \end{cases} \quad (3)$$

经过坐标变换,方程中出现网格导数和雅克比。

对于静止网格,在曲线网格控制单元  $I_{ijk} = [\xi_{i-1/2}, \xi_{i+1/2}] \times [\eta_{i-1/2}, \eta_{i+1/2}] \times [\zeta_{i-1/2}, \zeta_{i+1/2}]$  内对控制方程式(2)进行积分,可以得到如式(4)所示关系:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{J} \right)_{ijk} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{E}_{i+1/2,j,k} - \hat{E}_{i-1/2,j,k}) + \\ & \frac{1}{\Delta \eta} (\hat{F}_{i,j+1/2,k} - \hat{F}_{i,j-1/2,k}) + \\ & \frac{1}{\Delta \zeta} (\hat{G}_{i,j,k+1/2} - \hat{G}_{i,j,k-1/2}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式中,  $\left( \frac{Q}{J} \right)_{ijk}$  为单元  $I_{ijk}$  内的空间平均值,  $\hat{E}_{i+1/2,j,k}$ ,

$\hat{F}_{i,j+1/2,k}$ ,  $\hat{G}_{i,j,k+1/2}$  等为单元面上的通量。对于有限体积方法,流场信息存储在单元平均值  $\left( \frac{Q}{J} \right)_{ijk}$  中,为计算其随时间的变化,需要根据单元平均值重构得到单元面上的通量。接下来以通量  $\hat{E}_{i+1/2,j,k}$  为例对其计算方法进行说明,  $\hat{F}_{i,j+1/2,k}$ ,  $\hat{G}_{i,j,k+1/2}$  等的计算方法类似。

在数值计算中,积分要通过一定精度的近似计算得到。利用 Gauss 积分公式,通量  $\hat{E}_{i+1/2,j,k}$  可以表示为:

$$\hat{E}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\Delta \eta \Delta \zeta} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \hat{E}_{\alpha,\beta} K_{\alpha} K_{\beta} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\alpha,\beta} = & \hat{E} [ Q^L(\xi_{i+1/2}, \eta_{\alpha}, \zeta_{\beta}), Q^R(\xi_{i+1/2}, \eta_{\alpha}, \zeta_{\beta}), \\ & (\hat{\xi}_x, \hat{\xi}_y, \hat{\xi}_z, J)_{i+1/2,\alpha,\beta} ] \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $\alpha, \beta$  代表  $\eta$  和  $\zeta$  方向的 Gauss 点;  $K_{\alpha}$  和  $K_{\beta}$  为相应的权系数。那么有限体积方法构造的关键就在于如何得到 Gauss 点处的  $Q^L, Q^R$  以及相应的网格导数和雅克比。

### 1.1 逐维重构方法

曲线网格的一个重要优势就是可以在计算空间中通过逐维重构计算 Gauss 点处的  $Q^L$  和  $Q^R$ , 而实际应用证明逐维重构是较为简单和节约计算时间的方法,其本质就是在计算 Gauss 点值时进行多次重构,但每次重构都等价于一维重构。接下来给出这一重构方法的简要说明。

在三维空间中,首先利用单元平均值  $\left( \frac{Q}{J} \right)_{ijk}$  重构得到 Gauss 点所在面的左右面元平均值:

$$\begin{cases} \left( \frac{Q}{J} \right)_{i+1/2,j,k}^L = \frac{1}{\Delta \eta \Delta \zeta} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} \int_{\zeta_{k-1/2}}^{\zeta_{k+1/2}} \left( \frac{Q}{J} \right)^L d\eta d\zeta \\ \left( \frac{Q}{J} \right)_{i+1/2,j,k}^R = \frac{1}{\Delta \eta \Delta \zeta} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} \int_{\zeta_{k-1/2}}^{\zeta_{k+1/2}} \left( \frac{Q}{J} \right)^R d\eta d\zeta \end{cases} \quad (7)$$

然后,利用面元平均值重构得到 Gauss 点所在沿  $\zeta$  方向线元上的平均值:

$$\begin{cases} \left( \frac{Q}{J} \right)_{i+1/2,j,\alpha,k}^L = \frac{1}{\Delta \zeta} \int_{\zeta_{k-1/2}}^{\zeta_{k+1/2}} \left( \frac{Q}{J} \right)^L d\zeta \\ \left( \frac{Q}{J} \right)_{i+1/2,j,\alpha,k}^R = \frac{1}{\Delta \zeta} \int_{\zeta_{k-1/2}}^{\zeta_{k+1/2}} \left( \frac{Q}{J} \right)^R d\zeta \end{cases} \quad (8)$$

最后,利用线元上的平均值重构得到 Gauss 点处的左右值  $\left( \frac{Q}{J} \right)_{i+1/2,j,\alpha,k_{\beta}}^L, \left( \frac{Q}{J} \right)_{i+1/2,j,\alpha,k_{\beta}}^R$ 。根据数值方法精度的不同,每一次重构使用的模板长度不同。对 2 阶精度, Gauss 点位置位于单元面的中心,并且可以等价代替单元面的平均值,此时只需

要一次重构即可,而不需要进行多维重构;而对于高阶格式,必须进行多次重构,重构过程中需要使用 WENO 方法防止模板跨越间断。对于二维高阶格式,只要进行两次重构即可得到 Gauss 点处的左右值。

对于上述方法,此处不给出具体的计算公式,可以参考文献[10],文献中 Titarev 和 Toro 在笛卡尔网格下详细讨论了上述计算方法。本文与文献[10]的主要差别就在于当进行坐标变换时,重构变量由 $\overline{Q}$ 变为 $\overline{\left(\frac{Q}{J}\right)}$ ,并且通量计算中含有相应的网格导数,因此需要额外计算 Gauss 点处的网格导数和雅克比,接下来将对其计算进行说明。

### 1.2 网格导数和雅克比计算方法

网格导数在三维条件下存在多种等价的解析形式,但离散条件下各种表达式的数值表现却有很大差别。使用 Deng 等<sup>[11]</sup>在对称守恒网格导数计算方法 (Symmetrical Conservative Metric Method, SCMM) 中导出的对称守恒形式计算网格导数,如式(9)~(11)所示:

$$\begin{cases} \hat{\xi}_x = \frac{1}{2} [(zy_\eta)_\xi + (yz_\xi)_\eta - (zy_\xi)_\eta - (yz_\eta)_\xi] \\ \hat{\xi}_y = \frac{1}{2} [(xz_\eta)_\xi + (zx_\xi)_\eta - (xz_\xi)_\eta - (zx_\eta)_\xi] \\ \hat{\xi}_z = \frac{1}{2} [(yx_\eta)_\xi + (xy_\xi)_\eta - (yx_\xi)_\eta - (xy_\eta)_\xi] \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \hat{\eta}_x = \frac{1}{2} [(zy_\xi)_\xi + (yz_\xi)_\xi - (zy_\xi)_\xi - (yz_\xi)_\xi] \\ \hat{\eta}_y = \frac{1}{2} [(xz_\xi)_\xi + (zx_\xi)_\xi - (xz_\xi)_\xi - (zx_\xi)_\xi] \\ \hat{\eta}_z = \frac{1}{2} [(yx_\xi)_\xi + (xy_\xi)_\xi - (yx_\xi)_\xi - (xy_\xi)_\xi] \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \hat{\xi}_x = \frac{1}{2} [(zy_\xi)_\eta + (yz_\eta)_\xi - (zy_\eta)_\xi - (yz_\xi)_\eta] \\ \hat{\xi}_y = \frac{1}{2} [(xz_\xi)_\eta + (zx_\eta)_\xi - (xz_\eta)_\xi - (zx_\xi)_\eta] \\ \hat{\xi}_z = \frac{1}{2} [(yx_\xi)_\eta + (xy_\eta)_\xi - (yx_\eta)_\xi - (xy_\xi)_\eta] \end{cases} \quad (11)$$

对于雅克比的计算,也存在多种方法,此处使用物理量空间重构的方式得到 Gauss 点处的雅克比。对于单元平均值 $\overline{\left(\frac{Q}{J}\right)}_{ijk}$ 有:

$$\overline{\left(\frac{Q}{J}\right)}_{ijk} = \frac{1}{\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta} \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} \int_{\zeta_{k-1/2}}^{\zeta_{k+1/2}} \frac{Q}{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (12)$$

当假设  $Q$  在空间分布为常数时,式(12)可以简化为:

$$\overline{\left(\frac{1}{J}\right)}_{ijk} = \frac{1}{\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta} \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} \int_{\zeta_{k-1/2}}^{\zeta_{k+1/2}} \frac{1}{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (13)$$

根据积分变换定理可得:

$$\int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} \int_{\zeta_{k-1/2}}^{\zeta_{k+1/2}} \frac{1}{J} d\xi d\eta d\zeta = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} dx dy dz = V_{ijk} \quad (14)$$

式中,  $V_{ijk}$  为网格单元对应的物理空间的体积。因此,  $\frac{1}{J}$  在计算空间的平均值等于网格单元物理空间的体积与计算空间体积之比。而已知单元平均值,就可以通过 1.1 节的重构方法得到 Gauss 点处的值,并且此时的  $\frac{1}{J}$  也分左右。采用这一计算方法,将有效保持格式的自由流保持特性。

## 2 算例验证

通过对二维、三维算例的计算,验证文中发展的高精度有限体积格式的精度和对激波的捕捉能力。

### 2.1 等熵涡运输

为在曲线网格下验证有限体积格式,本算例中使用波形网格,其可以在均匀网格的基础上通过式(15)得到:

$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta x_0 \left[ A \sin \frac{n\pi(k-1)\Delta y_0}{L_0} \sin \frac{n\pi(l-1)\Delta z_0}{L_0} \right] \\ y = y_0 + \Delta y_0 \left[ A \sin \frac{n\pi(j-1)\Delta x_0}{L_0} \sin \frac{n\pi(l-1)\Delta z_0}{L_0} \right] \\ z = z_0 + \Delta z_0 \left[ A \sin \frac{n\pi(j-1)\Delta x_0}{L_0} \sin \frac{n\pi(k-1)\Delta y_0}{L_0} \right] \end{cases} \quad (15)$$

其中:  $n = 4, A = 0.4; L_0$  为计算域的总无量纲长度;  $j, k, l$  为网格点坐标索引;  $x_0, y_0, z_0$  为对应的坐标值;  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$  表示均匀网格长度,且满足  $\Delta x_0 = \Delta y_0 = \Delta z_0$ 。初始流场为等熵涡:

$$\begin{cases} u_0 = U_\infty - (U_\infty \beta) \frac{y - Y_c}{R} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \\ v_0 = (U_\infty \beta) \frac{x - X_c}{R} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $U_\infty$  是未扰动速度, 涡强度  $\beta = 0.02, (X_c, Y_c)$  为网格中心,  $r = \frac{\sqrt{(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2}}{R}$ , 其他物

理量的计算可以参考文献[12]。此算例中所有边界都设置为周期边界条件。

图 1 中给出了三维网格以及涡输运一个周期后的速度  $u$  分布。从图中可以看出,涡结构得到了很好的保持。考虑三维条件下计算量的限制,在二维条件下对这一问题进行了精度测试,表 1 给出了不同网格下速度  $v$  误差的  $L_1$  范数及计算得到的格式精度。从表中可以看出,在曲线网格下,本文发展的有限体积格式达到了设计的 5 阶精度,对于光滑流场具有较高的分辨率。

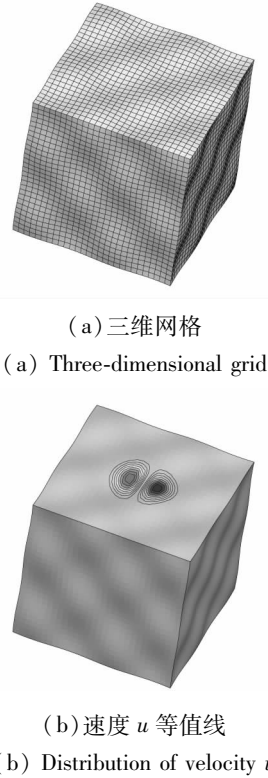


图 1 三维等熵涡输运网格和计算结果

Fig. 1 Grid and numerical result in the

three-dimensional isentropic vortex transport problem

表 1 涡输运问题在不同网格下的误差及精度

Tab. 1 Errors and the accuracy of order in vortex transform problem on different grids

网格	误差	精度
40 × 40	1. 020E - 04	
80 × 80	9. 129E - 06	3. 48
120 × 120	1. 389E - 06	4. 64
160 × 160	3. 416E - 07	4. 87
240 × 240	4. 622E - 08	4. 93

## 2.2 二维喷管流动

为了进一步验证格式在管道流动中的模拟能力,选取 Euler 方程控制的等熵二维喷管流动进行计算。Casper 等<sup>[13]</sup>最早对这一问题进行了研究。在本文中使用 C3 外形,中间段的形状通过式(17)拟合:

$$\begin{cases} y_1(x) = -0.5 + 0.05\sin^4\left(\frac{10}{9}\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \\ y_2(x) = 0.5 - 0.05\sin^4\left(\frac{10}{9}\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (17)$$

此算例中包含亚声速入口、出口及滑移边界条件。图 2 为喷管外形和网格示意图。

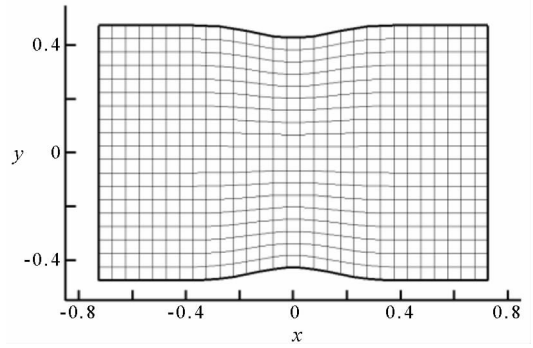


图 2 二维喷管外形和网格

Fig. 2 Configuration and mesh used in the two-dimensional channel flow

图 3 给出了计算得到的流场压力,从图中可以看出压力分布对称。表 2 中给出了流场熵误差的  $L_1$  范数和计算得到的格式精度。从表中可以看出,由于在边界处格式的精度要适当降低,总体精度略小于 5.0,但格式仍可以保持较高的数值精度,这表明本文使用的格式在管道流动中也有较好的效果。

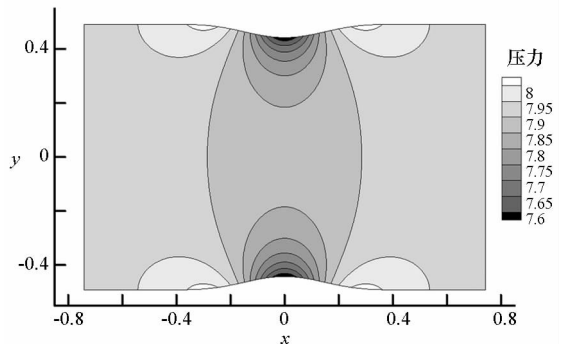


图 3 二维喷管流动压力分布

Fig. 3 Distribution of the pressure in the two-dimensional channel flow

表 2 喷管算例在不同网格下的熵误差及精度

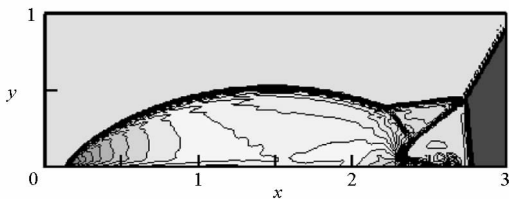
Tab.2 Entropy errors and the accuracy of order in the two-dimensional channel flow on different grids

网格	误差	精度
15 × 10	2.141E - 03	
30 × 20	5.439E - 05	5.30
45 × 30	1.010E - 05	4.15
60 × 40	2.889E - 06	4.35
90 × 60	4.642E - 07	4.51

### 2.3 双马赫反射

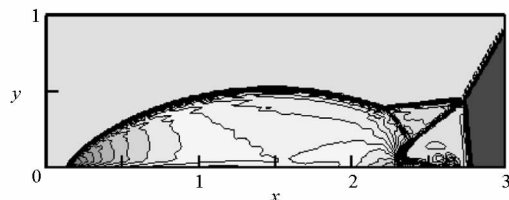
为了考核高精度有限体积格式在激波捕捉方面的能力,对双马赫反射问题进行了计算。算例的计算域为 $[0, 4] \times [0, 1]$ ,反射位置从下壁面 $1/6$ 处开始,初始时刻马赫数为 $10$ 的右行激波位于 $(1/6, 0)$ ,并与壁面成 $60^\circ$ 角。上边界条件设为精确的激波移动条件,整个数值计算进行到 $t = 0.2$ 。

一般双马赫反射问题都在笛卡尔网格下计算,但为了测试本文中高精度有限体积格式在曲线网格下的应用,同时在随机网格上进行了计算。随机网格的生成方法是在笛卡尔网格的基础上对网格坐标增加一个随机量。这一过程由 Fortran 程序控制,但不会超过当地步长的 $20\%$ 。文中使用 $240 \times 60$ 的计算网格。图 4 中分别给出了笛卡尔网格和随机网格下的计算结果。从图中可以看出,两种网格下的计算结果基本相同,并且格式都很好地捕捉到了激波结构。这表明本文中使用的精度有限体积格式同样具有很好的激波捕捉能力。



(a) 笛卡尔网格下计算结果

(a) Result on Cartesian grid



(b) 随机网格下计算结果

(b) Result on randomized grid

图 4 双马赫反射计算结果

Fig.4 Results in the double Mach reflection problem

### 3 结论

将基于逐维重构方法的高精度有限体积方法推广到三维曲线坐标系,讨论了曲线坐标系下的重构方法和网格导数、雅克比的计算方法。通过涡输运算例和喷管流动算例的计算,证明格式可以实现设计的精度,具有较高的空间分辨率。在双马赫反射算例中,一方面验证了格式具有良好的激波捕捉能力,另一方面也表明格式具有较强的网格适应能力,在随机网格上也可以得到较好的数值结果。在接下来的工作中,将考虑实现黏性项处理的高精度,从而将格式推广到 NS 方程的计算。

### 参考文献 (References)

- [1] Calhoun D A, Helzel C, LeVeque R J. Logically rectangular grids and finite volume methods for PDEs in circular and spherical domains [J]. SIAM Review, 2008, 50(4): 723 - 752.
- [2] Abgrall R. On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes analysis and implementation [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(1): 45 - 58.
- [3] Harten A, Chakravarthy S R. Multi-dimensional ENO schemes for general geometries [R]. ICASE Report No. 91 - 76, 1991.
- [4] Sonar T. On the construction of essentially non-oscillatory finite volume approximations to hyperbolic conservation laws on general triangulations: polynomial recovery, accuracy and stencil selection [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 140(1/2): 157 - 181.
- [5] Friedrich O. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids [J]. Journal of Computational Physics, 1998, 144(1): 194 - 212.
- [6] Hu C Q, Shu C W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes [J]. Journal of Computational Physics, 1999, 150(1): 97 - 127.
- [7] Tsoutsanis P, Titarev V A, Drikakis D. WENO schemes on arbitrary mixed-element unstructured meshes in three space dimensions [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(4): 1585 - 1601.
- [8] McDonald S D, Charest M R J, Groth C P T. High-order CENO finite-volume schemes for multi-block unstructured mesh [C]//Proceedings of 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA 2011 - 3854, 2011.
- [9] Casper J, Atkins H L. A finite-volume high-order ENO scheme for two-dimensional hyperbolic system [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 106(1): 62 - 76.
- [10] Titarev V A, Toro E F. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2004, 201(1): 238 - 260.
- [11] Deng X G, Min Y B, Mao M L, et al. Further study on geometric conservation law and application to high-order finite difference schemes with stationary grids [J]. Journal of Computational Physics, 2013, 239: 90 - 111.
- [12] Abe Y, Haga T, Nonomura T, et al. On the freestream preservation of high-order conservative flux-reconstruction schemes [J]. Journal of Computational Physics, 2015, 281: 28 - 54.
- [13] Casper J, Shu C W, Atkins H. A comparison of two formulations for high-order accurate essentially non-oscillatory schemes [J]. AIAA Journal, 1994, 32(10): 1970 - 1977.