

文章编号: 1000-4750(2016)06-0009-06

充液环肋圆柱壳耦合振动的波动解

梁 斌¹, 刘小宛¹, 李 戎², 徐红玉¹

(1. 河南科技大学土木工程学院, 河南, 洛阳 471023; 2. 九州工业大学机械系, 日本, 北九州 804-8550)

摘 要: 研究了充液环肋圆柱壳结构的耦合振动特性。基于 Love 壳体理论, 考虑壳体内部完全充液, 采用波动法建立充液环肋圆柱壳耦合振动的频率特征方程, 得到了不同边界条件下的耦合频率值。通过与已有文献数据对比, 验证了该文研究方法的有效性和正确性。最后通过算例, 分析了充液因素、环肋参数、边界条件、壳体几何参数等对充液环肋圆柱壳耦合振动的影响。

关键词: 环肋; 充液; 圆柱壳; 耦合振动; 波动法

中图分类号: O327 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.11.0940

STUDY ON VIBRATION OF FLUID-FILLED CYLINDRICAL SHELLS WITH RING-STIFFENER USING WAVE PROPAGATION APPROACH

LIANG Bin¹, LIU Xiao-wan¹, LI Rong², XU Hong-yu¹

(1. College of Civil Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang, Henan 471023, China;

2. Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu-city, 804-8550, Japan)

Abstract: The vibration characteristic of fluid-filled cylindrical shells with ring-stiffeners is studied. Theoretical formulation is established based on the Love's shell theory. The shell eigenvalue governing equation is derived with the consideration of fluid-filled property, using a wave propagation approach. Then the coupled frequency of the cylindrical shell with different boundary conditions is obtained. The present analysis is validated by comparing the results with those in pertinent literatures. The results are presented on the influence of fluid-filled characteristics, stiffening parameters, boundary conditions and the influence of geometrical dimension.

Key words: ring-stiffener; fluid-filled; cylindrical shell; coupled vibration; wave propagation approach

环肋圆柱壳结构是工程实际中经常使用的结构形式, 如输水输油管道、贮油罐、火箭以及潜艇耐压壳等。考虑到这类结构的安全性要求非常高, 而其工作环境却又非常复杂和极端, 经常受到强空气动力作用、极端气候环境及流体的作用, 因此需要对这类结构的动力特性进行深入研究。

目前, 关于充液圆柱壳(包括充液环肋圆柱壳)的动力性能研究已取得一些研究成果。Zhang^[1]采用

波动法研究了考虑流体影响的圆柱壳的振动特性。Moeini 等^[2]使用 Ritz 法, 考虑了肋骨尺寸的非统一性对功能梯度环肋圆柱壳振动特性的影响。杨登峰^[3]基于 Love 理论, 研究了两端简支边界条件下的中空和充液加肋圆柱壳的自由振动行为。Gan 等^[4]以环肋圆柱壳为研究对象, 基于 Flugge 理论, 讨论了波动法在考虑静水压力问题下的应用。李国栋等^[5]依据 Reissner-Nagbdi 壳体理论和 Timoshenko 环梁理论,

收稿日期: 2014-11-08; 修改日期: 2016-01-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(51105132); 河南省自然科学基金项目(122300410112)

通讯作者: 梁 斌(1963—), 男, 河南人, 教授, 博士, 博导, 副院长, 从事工程结构动力学计算与仿真研究(E-mail: liangbin4231@163.com).

作者简介: 刘小宛(1987—), 女, 河南人, 硕士生, 从事工程结构动力学计算与仿真研究(E-mail: Henrietta10202@163.com);

李 戎(1986—), 女, 河南人, 博士生, 从事工程结构动力学计算与仿真研究(E-mail: 65111667@qq.com);

徐红玉(1973—), 男, 河南人, 教授, 博士, 副处长, 从事工程结构非线性分析与优化设计研究(E-mail: xhyxb@163.com).

采用 Ritz 法对环肋圆柱壳的稳定性进行了研究。梁斌等^[6]从 Love 经典壳体理论出发, 引入新型功能梯度材料, 研究了基于复合材料的充液圆柱壳的耦合振动特性。李恩奇等^[7]发展并验证了分布参数传递函数方法对约束层阻尼圆柱壳进行动力学特性分析的正确性。以及其他相关文献[8—16]。充液环肋结构的动力特性取决于壳体、肋骨和流体之间的相互作用与影响, 目前的研究成果多限于单一因素的影响探讨, 很多内容有待深入研究。

本文以充液环肋圆柱壳为研究对象, 讨论了波动法在考虑加肋壳充液问题下的应用。在经典壳体理论上, 采用波动法, 建立充液环肋圆柱壳耦合振动频率的特征方程, 得到不同边界条件下的耦合频率。通过分别不考虑环肋影响和考虑充液因素两种方法的退化计算对比, 验证本文研究方法的有效性和正确性。最后通过算例, 探讨充液因素、加肋形式、肋条尺寸和数目、壳体参数、边界条件等对充液环肋圆柱壳耦合振动的影响。

1 力学模型

环肋圆柱壳结构力学模型如图1所示, 平均半径为 R , 长度为 L , 壁厚为 h 。在壳壁中面建立正交坐标系 (x, θ, z) , 其中 x 、 θ 、 z 分别为壳体的轴向、环向和径向坐标。肋骨的参数为: 环肋的高度为 h_r , 宽度为 b_r , 环肋间距为 l 。壳体与肋骨采用相同的材料, 弹性模量为 E , 泊松比为 μ , 材料密度为 ρ 。

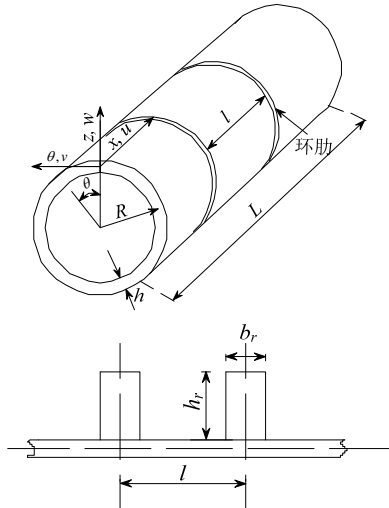


图1 环肋圆柱壳和肋骨模型

Fig.1 Geometry of ring-stiffened cylindrical shell and stiffener

2 理论推导

基于 Love 壳体理论, 根据环向加肋圆柱壳内

力与壳体中面位移的关系, 代入平衡方程, 可以得到壳体中面位移关系表示的平衡方程^[3]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\rho h'}{K} u_{tt} &= u_{xx} + \frac{1+\mu}{2R} v_{x\theta} + \frac{(1-\mu)(1+k)}{2R^2} u_{\theta\theta} - \\ &\quad \frac{\mu}{R} w_x + kRw_{xxx} - \frac{k(1-\mu)}{2R} w_{x\theta\theta} \\ \frac{\rho h'}{K} v_{tt} &= \frac{(1+\mu)}{2R} u_{x\theta} + \frac{(1-\mu)(1+3k)}{2} v_{xx} + \\ &\quad \frac{k(3-\mu)}{2} w_{xx\theta} - \frac{k\zeta}{R^2} v_{\theta\theta} + \left(\frac{1}{R^2} v_{\theta\theta} - \frac{1}{R^2} w_{\theta} \right) \cdot \\ &\quad (\lambda+1) - \frac{k\zeta}{R^2} w_{\theta\theta\theta} + \frac{k\eta}{R^2} w_{\theta} + \frac{k\eta}{R^2} w_{\theta\theta\theta} \\ \frac{\rho h'}{K} w_{tt} &= -kRu_{xxx} - kR^2 w_{xxx} - k(\eta_t + 2)w_{xx\theta\theta} - \\ &\quad \frac{k\omega(1+\zeta)}{R^2} + \frac{\mu}{R} u_x + \frac{k\zeta}{R^2} v_{\theta\theta\theta} + \frac{k(1-\mu)}{2R} u_{x\theta\theta} - \\ &\quad \frac{k(3-\mu)}{2} v_{xx\theta} - \frac{k(\eta+1)}{R^2} w_{\theta\theta\theta\theta} - \\ &\quad \frac{k(2\zeta+\eta+2)}{R^2} w_{\theta\theta} + \left(\frac{1}{R^2} v_{\theta} - \frac{w}{R^2} \right) (1+\lambda) \end{aligned} \right. \quad (1)$$

式中: $h' = h + \frac{b_r h_r}{l}$; $k = \frac{h^2}{12R^2}$; $K = \frac{Eh}{1-\mu^2}$;
 $\zeta = \frac{12REb_r h_r e}{Kh^2 l}$, $e = \pm \frac{h+h_r}{2}$, $\lambda = \frac{Eb_r h_r}{Kl}$; $\eta = \frac{EI}{DI}$;
 $\eta_t = \frac{EJ}{2D(1+\mu)l}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 其中 K 、 D 分别为

壳板拉伸刚度与弯曲刚度, I 、 J 分别为环肋对壳板中面惯性矩与环肋的扭转惯性矩, e 为环向肋骨对壳板中面的偏心距, 外加肋取负, 内肋取正。

壳体方程的位移形态可以用波的传播形式表示, 与轴向波数 k_m 和周向波数 n 相关。

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, \theta, t) &= A_m \cos(n\theta) e^{(i\omega t - ik_m x)} \\ v(x, \theta, t) &= B_m \sin(n\theta) e^{(i\omega t - ik_m x)} \\ w(x, \theta, t) &= C_m \cos(n\theta) e^{(i\omega t - ik_m x)} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

式中: A_m 、 B_m 、 C_m 分别表示 x 、 θ 、 z 方向的幅值; ω 为固有角频率。

充液圆柱壳的流体满足声波方程, 流体动压力 P ^[8]满足:

$$P = P_m \cos(n\theta) J_n(k_r r) e^{(i\omega t - ik_m x)} \quad (3)$$

其中, $J_n()$ 为 n 阶 Bessel 函数。径向波数 k_r 与轴向波数 k_m 有关系式^[8] $(k_r R)^2 = \Omega^2 (C_L / C_F)^2 - (k_m R)^2$, 其中 Ω 为无量纲频率参数, C_L 和 C_F 分别

为壳体和流体的声速。在壳体内壁与流体的界面上，流体径向位移与壳体径向位移相等，该耦合条件表达为：

$$-\{1/(i\omega\rho_f)\}(\partial P/\partial r)|_{r=R} = (\partial w/\partial t)|_{r=R} \quad (4)$$

$$P_m = [\omega^2\rho_f/k_r J'_n(k_r R)]W_m \quad (5)$$

其中： ρ_f 为流体密度； $J'_n(k_r R)$ 表示Bessel函数对变量 $k_r R$ 的导数。将位移函数代入，并考虑流体影响，可得耦合系统的运动方程：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} + F_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

其中，矩阵元素 C_{ij} 取决于壳体参数和两端约束条件，表达式参见附录。 F_L 为流体声场作用产生的流体荷载项，若取 $F_L = 0$ ，即退化为非耦合系统频率方程。

$$F_L = \Omega^2(\rho_f/\rho)(R/h)(k_r R)^{-1} \cdot [J_n(k_r R)/J'_n(k_r R)] \quad (7)$$

由式(6)对系数矩阵求行列式等于零，采用牛顿迭代法即可得到充液环肋圆柱壳的耦合频率，取其中最小者为研究对象。

3 算例与讨论

为验证本文理论研究的有效性和正确性，通过两种方法进行退化对比验算，见表1与表2。表1计算了充液圆柱壳，不考虑肋条影响时的耦合频率数据，通过与参考文献[8]的结果进行对比，验证了本文计算充液圆柱壳耦合频率的正确性。表2给出了环肋(外加肋)圆柱壳结构，不考虑流体影响时的固有频率，通过与参考文献[4,9]的结果进行对比，验证了本文在计算环肋圆柱壳固有频率时的正确性。

本文采用波动法通过转换轴向波数，得到了固支-简支、简支-简支、固支-固支、固支-自由等不同

表 1 充液圆柱壳耦合频率的对比分析

Table 1 Comparison of coupled frequencies for a fluid-filled cylindrical shell

(m, n)	文献[8]	本文	误差/(%)
(1,2)	4.93	4.92	0.20
(1,3)	8.94	8.93	0.11
(2,2)	11.48	11.47	0.09
(2,3)	10.64	10.62	0.19
(3,3)	14.66	14.63	0.20
(1,4)	18.26	18.24	0.11
(2,4)	18.73	18.70	0.16

表 2 环肋圆柱壳固有频率的对比分析

Table 2 Comparison of natural frequencies for ring-stiffened cylindrical shell

(m, n)	文献[9]	文献[4]	本文
(1,1)	1204	1216	1216
(1,2)	1587	1635	1636
(1,3)	4462	4578	4578
(1,4)	8559	8781	8782
(2,1)	3498	3536	3537
(2,2)	2129	2176	2178
(2,3)	4437	4573	4574
(2,4)	8482	8731	8733
(3,1)	5844	5907	5908
(3,2)	3386	3430	3432
(3,3)	4627	4788	4791
(3,4)	8438	8728	8731

边界条件下的耦合频率。算例讨论主要以固支-自由条件为例，假定肋骨等间距均匀设置，通过考虑充液特性，以及变换加肋形式、环肋尺寸与数量等多种因素，得到了多组圆柱壳振动频率的计算数据。壳体参数： $\rho = 8166 \text{ kg/m}^3$ ， $L = 0.4709 \text{ m}$ ， $E = 2.07788 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ， $\mu = 0.317756$ ， $h = 0.00119 \text{ m}$ ， $h_r = 0.00582 \text{ m}$ ， $R = 0.1037 \text{ m}$ ， $m = 1$ ， $b_r = 0.00218 \text{ m}$ ，环肋数 $N = 9$ 。

首先分别以圆柱壳光壳和环肋圆柱壳作为研究对象，分析其充液情况下的耦合振动及不充液的非耦合振动频率特征，探讨充液因素对圆柱壳结构振动特性的影响。图2与图3分别给出了两种结构在不同轴向半波数 m 时的频率曲线。可以看出，两种研究对象的耦合频率与非耦合频率随周向波数 n 的变化规律是相似的。随着 m 的增大，所对应 n 的频率亦有增大，但轴向半波数对频率的影响主要表现在周向波数较小的情况下； n 增大到一定程度，轴向半波数对耦合频率的影响可忽略；值得注意的是，充液情况下的耦合频率明显小于非耦合振动频率，充液因素对壳体振动的影响不可忽视。

图4仍以光壳与加肋壳两种结构为研究对象，给出了不同周向波数时，耦合频率与非耦合频率比值变化曲线。耦合频率明显小于非耦合振动频率，在图示周向波数范围内，随周向波数 n 的增大，两种结构的耦合频率逐渐由非耦合频率的约2/5增大至非耦合频率的3/4范围内；环肋壳结构比光壳结构的耦合频率比值大，表明加肋因素影响明显。

除了充液因素，肋骨参数变化对壳体的影响亦是本文研究的重点。不同加肋形式、肋骨高度以及

环肋数等因素下的圆柱壳耦合频率曲线，分别见图5~图7。

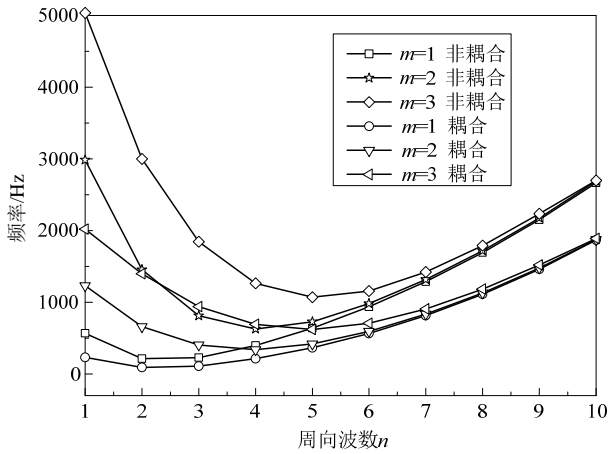


图2 不同轴向半波数 m 时圆柱壳光壳的频率曲线

Fig.2 Variation for cylindrical shells with some different axial half wave numbers

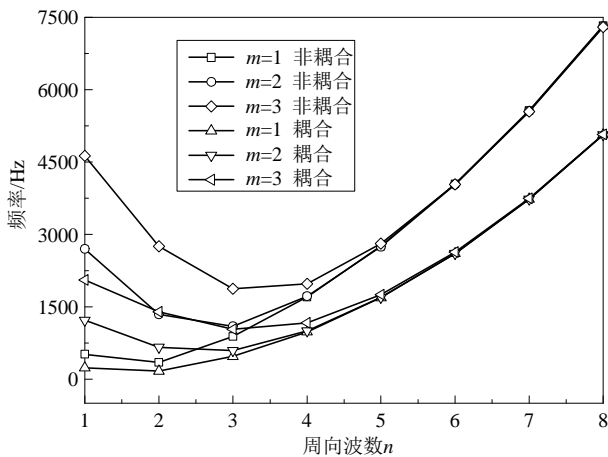


图3 不同轴向半波数 m 时环肋圆柱壳的频率曲线

Fig.3 Variation for ring-stiffened cylindrical shells for some different axial half wave numbers

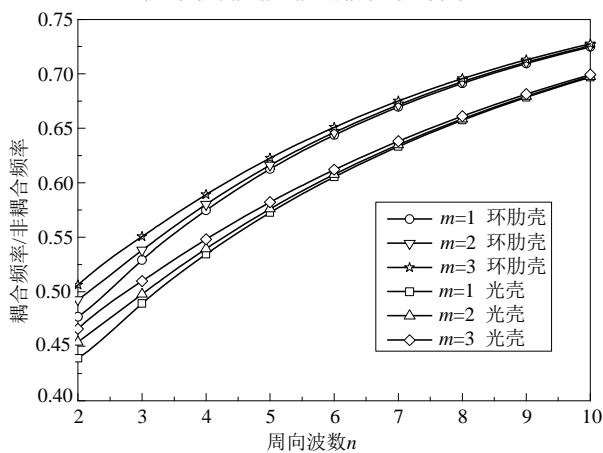


图4 圆柱壳耦合频率与非耦合频率比值变化曲线

Fig.4 Variation for ratios of coupled frequency to uncoupled frequency of cylindrical shells

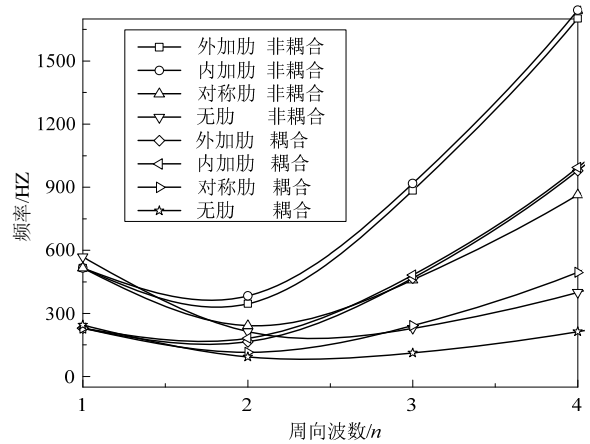


图5 不同加肋形式时圆柱壳的频率曲线

Fig.5 Variation for frequencies of cylindrical shells with some different stiffening type

结合环肋圆柱壳结构在实际工程中的应用，考虑环肋偏心的内加肋、外加肋、不计偏心的对称肋等三种不同肋骨布置形式，以及未加肋情况，图5给出了不同加肋形式下圆柱壳的频率曲线。轴向波数 $m=1$ 时，内加肋圆柱壳的频率值略高于外加肋，提高结构耦合频率的效果更明显；外加肋与内加肋的频率值高于对称肋；对比加肋和不加肋情况的频率曲线，当周向波数 $n \geq 2$ 时，随着 n 的增大，加肋结构频率显著增大，肋骨对结构频率的提升效果凸显。

图6给出了外加肋充液圆柱壳具有不同肋骨高度时的耦合频率曲线，探讨环肋尺寸对于环肋圆柱壳的频率影响。分别取 $h_r=0.00291\text{ m}$ 、 0.00582 m 、 0.00873 m 、 0.01167 m 。由图可知，随着肋骨高度的增大，圆柱壳耦合频率随之增大，且增幅随周向波数 n 而明显增大；肋骨高度变化对耦合频率的影响主要表现在周向波数较大的情况下；周向波数

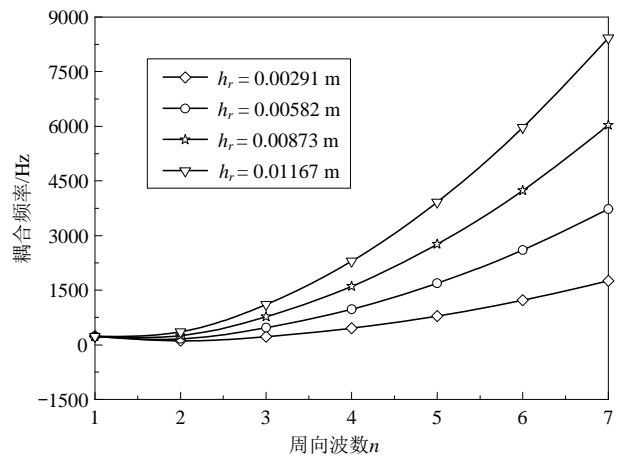


图6 不同肋骨高度时充液圆柱壳的耦合频率曲线

Fig.6 Variation for fluid-filled cylindrical shells with some different stiffening height

$n=1$ 时的振动, 相当于结构做梁式振动, 这时肋骨高度提升起到附加质量的作用, 对加肋圆柱壳的频率贡献要小。

图 7 给出了环肋数 $N=0、5、9、14、19$ 时的充液圆柱壳耦合频率曲线。由图可知, 随周向波数的增大, 加肋数目对圆柱壳耦合频率的影响越明显; 随着加肋数目的增加, 圆柱壳的耦合频率也随之增大, 相比加肋高度变化, 加肋数目对频率的影响相对较弱。

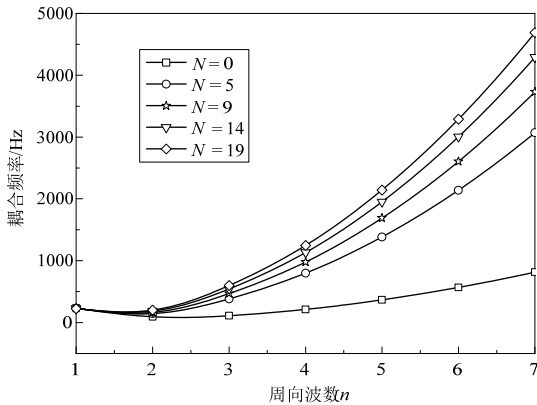


图 7 不同环肋数时充液圆柱壳的耦合频率曲线

Fig.7 Variation for fluid-filled cylindrical shells with some different stiffener number

图 8 给出了不同壳体长度时圆柱壳的耦合频率曲线。以壳体长度 L 为出发点, 研究壳体参数对耦合频率的影响。通过变换 L 值为 $0.2074\text{ m}、0.4709\text{ m}、0.7259\text{ m}、0.9333\text{ m}、1.2444\text{ m}$, 给出了固支-自由边界条件下的壳体耦合频率曲线。可以看出, 壳体的耦合频率随壳体长度的减小而增大; 壳体长度对耦合频率的影响在周向波数大时更明显。

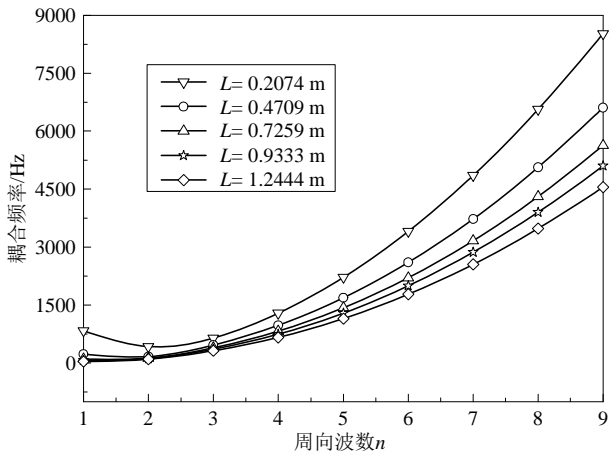


图 8 不同壳体长度时圆柱壳的耦合频率曲线

Fig.8 Variation for cylindrical shells with some different length of the shell

图 9 给出了 4 种边界条件下的圆柱壳耦合频率曲线。通过变换约束条件, 研究边界条件对壳体振动频率的影响, 取加肋数 $N=9$ 。可以看出, 非耦合频率和耦合频率的变化规律类似; 且频率数值随边界约束的增加而增大, 两端固支边界的频率最大, 一端固支一端自由边界条件的频率最小; 边界条件对壳体频率的影响主要表现在周向波数较小时, 如图所示 n 增大到一定程度后, 边界条件的影响可以忽略。

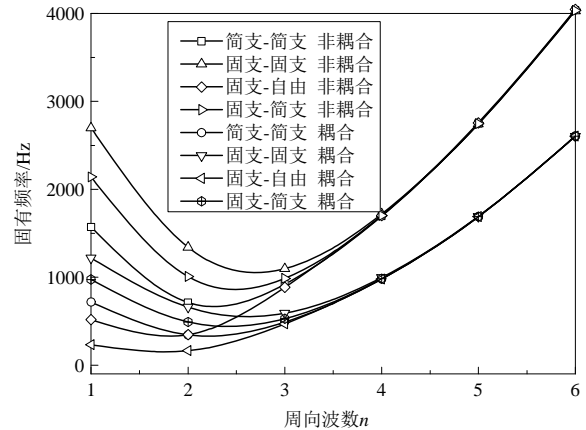


图 9 不同边界条件时环肋圆柱壳的频率曲线

Fig.9 Variation for ring-stiffened cylindrical shells with some different boundary condition

4 结论

(1) 内部充液明显降低了环肋圆柱壳的振动频率, 流体因素对壳体振动特性的影响显著; 轴向半波数对耦合频率的影响在周向波数较小时更明显; 随周向波数增大, 耦合频率与非耦合频率都逐渐增大, 加肋耦合频率逐渐增大至非耦合频率的约 $3/4$ 。

(2) 加肋形式变化对圆柱壳振动频率的影响不同, 内加肋形式对提高结构频率的效果更佳; 随着周向波数的增大, 加肋结构的耦合频率增幅明显, 肋骨对圆柱壳结构频率的贡献凸显。

(3) 随着肋骨高度以及加肋数目的增加, 相应圆柱壳的振动频率也随之增大; 两者变化对振动频率的影响主要表现在周向波数较大的情况下; 相比加肋数目变化, 肋骨尺寸变化对耦合频率的影响更大。

(4) 耦合振动频率与约束相关, 频率值随边界约束的增强而增大, 两端固支边界的频率最大; 边界条件对壳体频率的影响主要表现在周向波数较小时; 耦合频率随壳体长度的减小而增大; 壳体长度对耦合频率的影响在周向波数大时更明显。

参考文献:

- [1] Zhang X M. Frequency analysis of submerged cylindrical shells with the wave propagation approach [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44(7): 1259–1273.
- [2] Moeini S A, Rahaeifard M, Ahmadian M T. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells stiffened by uniformly and non-uniformly distributed ring stiffeners [C]. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2010, 15: 367–375.
- [3] 杨登峰. 充液加肋圆柱壳的振动特性[D]. 上海: 上海交通大学, 2003.
Yang Dengfeng. Research on vibration of ring-stiffened cylindrical shell filled with fluid [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2003. (in Chinese)
- [4] Gan L, Li X B, Zhang Z. Free vibration analysis of ring-stiffened cylindrical shells using wave propagation approach[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 326(3/4/5): 633–646.
- [5] 李国栋, 尚新春. 考虑剪切效应的环肋圆柱壳的稳定性[J]. 工程力学, 2007, 24(9): 43–49.
Li Guodong, Shang Xinchun. Instability of ring-stiffened cylindrical shell with shear effect [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(9): 43–49. (in Chinese)
- [6] 梁斌, 李戎, 张伟. 基于功能梯度材料的充液圆柱壳耦合振动研究[J]. 船舶力学, 2011, 15(12): 1429–1438.
Liang Bin, Li Rong, Zhang Wei. Coupled vibration of fluid-filled functionally graded material cylindrical shell [J]. Journal of Ship Mechanics, 2011, 15(12): 1429–1438. (in Chinese)
- [7] 李恩奇, 李道奎, 唐国金, 等. 约束层阻尼圆柱壳动力学分析[J]. 工程力学, 2008, 25(5): 6–11.
Li Enqi, Li Daokui, Tang Guojin, et al. Dynamic analysis of constrained layer damping cylindrical shell [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(5): 6–11. (in Chinese)
- [8] Zhang X M, Liu G R, Lam K Y. Coupled vibration analysis of fluid-filled cylindrical shells using the wave propagation approach [J]. Applied Acoustics, 2001, 62(3): 229–243.
- [9] Mustafa B, Ali R. An energy method for free vibration analysis of stiffened circular cylindrical shells [J]. Composite Structures, 1989, 32(2): 335–363.
- [10] Zhu X, Ye W B, Li T Y, et al. The elastic critical pressure prediction of submerged cylindrical shell using wave propagation method [J]. Ocean Engineering, 2013, 58(1): 22–26.
- [11] Pourmahmoud M, Salmanzadeh M, Mehrani M. Clamped-clamped boundary conditions for analysis free vibration of functionally graded cylindrical shell with a ring based on third order shear deformation theory [C]. World Academy of Science, Engineering and Technology, 2010, 41: 684–689.
- [12] 李戎, 梁斌, Na Noda, 等. 基于波动法的静水压力下功能梯度圆柱壳振动特性研究[J]. 船舶力学, 2013, 17(1/2): 148–154.
Li Rong, Liang Bin, Na Noda, et al. Study on vibration of functionally graded cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure by wave propagation method [J]. Journal of Ship Mechanics, 2013, 17(1/2): 148–154. (in Chinese)
- [13] Najafizadeh M M, Hasani A, Khazaeinejad P. Mechanical stability of functionally graded stiffened cylindrical shells [J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 1151–1157.
- [14] Jafari A A, Bagheri M. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods [J]. Thin-Walled Structures, 2006, 44(1): 82–90.
- [15] 李学斌, 陈虹, 潘治. 充液圆柱壳的动态特性研究[J]. 舰船科学技术, 2008, 30(2): 45–50.
Li Xuebin, Chen Hong, Pan Zhi. Study on dynamic characteristics of cylindrical shells filled with fluid [J]. Ship Science and Technology, 2008, 30(2): 45–50. (in Chinese)
- [16] Zhou X P. Vibration and stability of ring-stiffened thin-walled cylindrical shells conveying fluid [J]. Acta Mechanica Sinica, 2012, 25(2): 168–176.

附录:

矩阵元素 C_{ij} 表达式:

$$C_{11} = -k_m^2 R^2 - \frac{n^2(1-\mu)}{2}(1+k) + R^2 \rho \omega^2 \frac{h'}{K},$$

$$C_{12} = -\frac{nRk_m(1+\mu)i}{2},$$

$$C_{13} = k_m \mu R i + kR^3 k_m^3 i - \frac{kRn^2 k_m(1-\mu)i}{2},$$

$$C_{21} = -C_{12},$$

$$C_{22} = -\frac{R^2 k_m^2(1+3k)(1-\mu)}{2} - n^2(1+\lambda - k\zeta) + \frac{R^2 \rho \omega^2 h'}{K},$$

$$C_{23} = \frac{kR^2 k_m^2 n(3-\mu)}{2} + n(1+\lambda - k\eta) + kn^3(\eta - \zeta),$$

$$C_{31} = -C_{13},$$

$$C_{32} = n(1+\lambda) + \frac{knR^2 k_m^2(3-\mu)}{2} - kn^3 \zeta,$$

$$C_{33} = -(1+\lambda) - kk_m^4 R^4 - kn^2 k_m^2 R^2(2+\eta) - kn^4(1+\eta) - k(1+\zeta) + \frac{R^2 \rho \omega^2 h'}{K} + kn^2(2+\eta + 2\zeta).$$