

§ 8.4 光的相速度与群速度

Phase Velocity and Group Velocity

根据光的微粒说，光在两种媒质界面上折射时， $\sin i_1 / \sin i_2 = v_2 / v_1$ ，而根据光波动说 $\sin i_1 / \sin i_2 = v_1 / v_2$ 。

傅科做实验测定空气和水中光速之比近于4:3，此数值与空气到水的折射率相符，从而判定光的波动说的正确性。

虽然在傅科实验完成之前，光的波动说已为大量事实（如干涉、衍射、偏振等）所证明，但傅科的实验仍被认为是对惠斯原理最直接和最有力的支持。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

随着测定光速方法的改进，问题又复杂化了，1885年迈克耳逊以较高的精度重复了傅科实验的同时，还测定了空气和 CS_2 光速之比为1.758，但是用折射法测定的 CS_2 折射率为1.64，两数相差甚大，这绝非实验误差所致。

瑞利对光速的概念进行了深入详尽的研究，提出“群速”的概念之后才解决这个矛盾。

一. 相速度

迄今为止，对于各向同性介质在提到波速时，都指的是波面（等位相面）传播的速度，即相速度 v_p ，在惠更斯原理中如此，在波函数的表达式中也如此。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

2

理想的单色平面波的波动方程可表示为：

$$E = A \cos(\omega t - kr)$$

上式 $\omega = 2\pi\nu$ ， $k = 2\pi/\lambda$ 都是不随 t 和 r 改变的量。

因此，相位不变的条件为：

$$\omega t - kr = \text{常数}$$

两边微分得： $\omega dt - kdr = 0$

即

$$\frac{dr}{dt} = v_p = \frac{\omega}{k} = v\lambda$$

可见，相速度是严格单色光所特有的一种速度。严格的单色光在空间延续和时间延续都是无穷无尽的余弦或正弦波。但这种波是理想的极限情况。



聊城大学

物理科学与信息工程学院

在真空中所有波长的电磁以同一相速 c 传播，复色光可视为若干单色波列的叠加，所以复色光在真空中传播的相速度就等于单色光在真空中传播的相速度。

在色散介质中，各单色光以不同的相速度传播，因而，复色光在色散介质中的传播问题也随之复杂化。

二. 群速度

简单起见，假设复色光由两列单色光波组成，其振幅均为 a ，频率分别为：

$$\omega_1 = \omega_0 + d\omega \quad \omega_2 = \omega_0 - d\omega$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

波数分别为： $k_1 = k_0 + dk$ $k_2 = k_0 - dk$

则这两列单色光波可分别表示为：

$$E_1 = a \cos(\omega_1 t - k_1 r)$$

$$E_2 = a \cos(\omega_2 t - k_2 r)$$

可以推得其合成波为：

$$E = A_0 \cos(\omega_0 t - k_0 r)$$

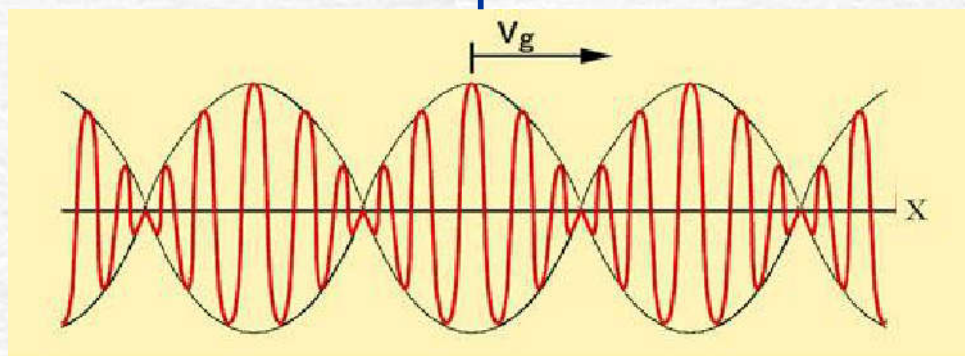
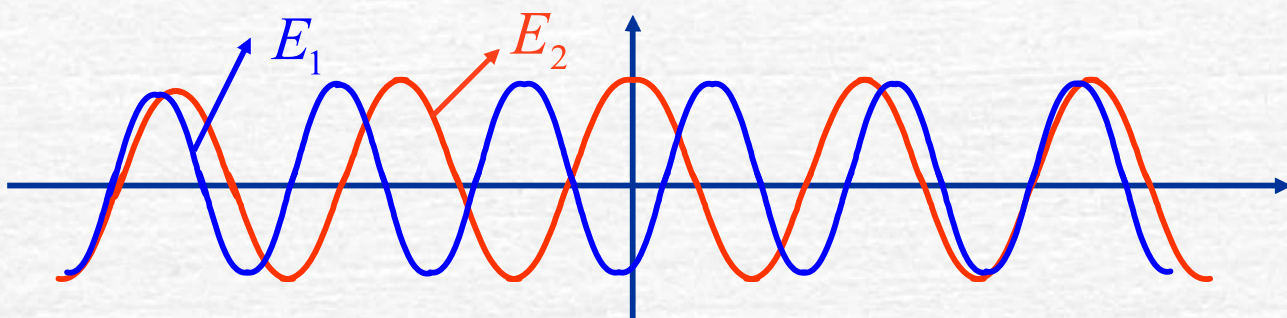
其中 $A_0 = 2a \cos(d\omega t - dkr)$

即合成波的振幅 A_0 不是常数，而是随 r 和 t 缓慢变化的余弦函数。如图



聊城大学

物理科学与信息工程学院



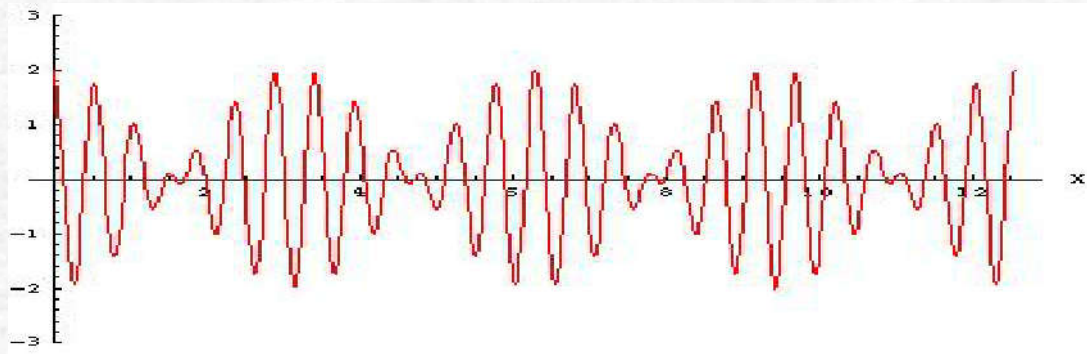
合成波和波包

合成波的速度，即波包上任一点的前移速度，也就是波包上等振幅面向前推进的速度。它代表着波包具有的能量传播速度。



聊城大学

物理科学与信息工程学院



定义：复色光在色散介质中，整个波包传播的速度，称为群速度。

振幅不变的条件为： $d\omega t - dk r = \text{constant}$

因 $d\omega$ ， dk 都是不随 t 和 r 改变的量，微分上式得：

$$d\omega dt - dk dr = 0$$

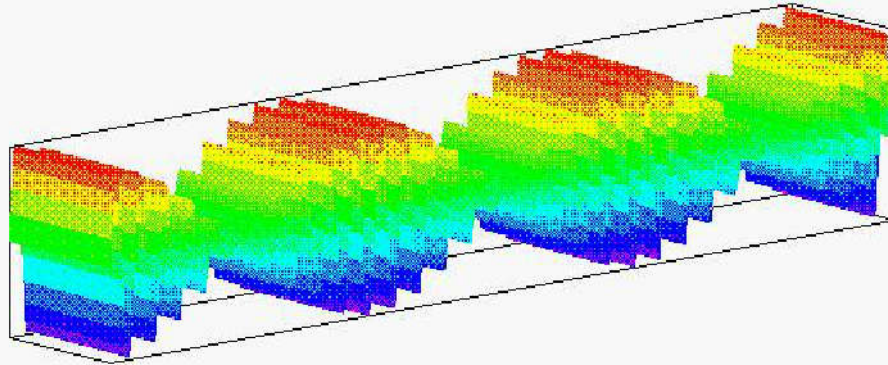
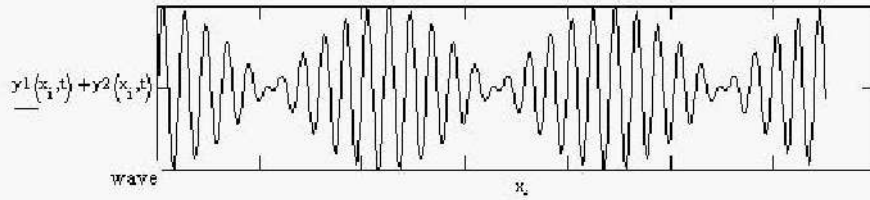
因此，群速度可表示为：

$$v_g = \frac{dr}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院



聊城大学

物理科学与信息工程学院

三. 群速与相速的关系

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(v_p k)}{dk} = v_p + k \frac{dv_p}{dk} \quad (1)$$

因 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 所以

$$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda \quad \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$$

$$\frac{dv_p}{dk} = \frac{dv_p}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{dv_p}{d\lambda}$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

代入 (1) 式可得:

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} \quad \text{——称为瑞利公式}$$

因为 $v_p = \frac{c}{n}$

所以 $v_g = \frac{c}{n} + \frac{c\lambda}{n^2} \frac{dn}{d\lambda}$

$$v_g = v_p \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$



聊城大学

物理科学与信息工程学院

讨论:

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$$

(1) 当 $\frac{dv_p}{d\lambda} > 0$ 时, 则 $v_g < v_p$ 正常色散

(2) 当 $\frac{dv_p}{d\lambda} < 0$ 时, 则 $v_g > v_p$ 反常色散

(3) 当 $\frac{dv_p}{d\lambda} = 0$ 时, 则 $v_g = v_p$ 无色散

$n = \frac{c}{v}$ 为相速之比,

折射定律 $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2}$ 也是相速之比



聊城大学

物理科学与信息工程学院

通过测量光在不同介质中的速度之比来确定折射率，不论哪种测量方法，测得的光在介质中的速度实际上是群速而不是相速。

因为 CS_2 为正常色散， $v_g < v_p$ ，因而所得折射率 $n = 1.758$ 大于用折射法测得的结果 $n = 1.64$ 。

第六章结束



聊城大学

物理科学与信息工程学院