

文章编号: 1000-4750(2016)06-0222-08

狭长平行板间液桥形态及受力研究

朱朝飞¹, 贾建援¹, 付红志², 陈轶龙¹, 曾志¹, 于大林¹

(1. 西安电子科技大学机电工程学院, 西安 710071; 2. 中兴通讯股份有限公司, 深圳 518057)

摘 要: 在狭长光滑平行板间形成的体积恒定的液桥, 随着两板间距的变化, 液固界面宽度受平板长度方向的边界约束保持不变, 但液桥会沿着平板长度方向自由地伸长缩短, 这必将引起液桥形态参数的变化, 进而使液桥的受力发生变化。该文考虑细长液桥轮廓的边缘效应, 建立液桥的拟三维受力模型。在液桥体积恒定的条件约束下, 根据其细长形态特征利用高效的方法求解液桥形态微分方程。最后, 该文研究平行板间距变化引起的接触角、长度、宽度等液桥形态参数的变化与液桥受力变化之间的联系, 并将计算结果与 Surface Evolver 的仿真结果进行对比, 证明该文所述方法的正确性和实用性。

关键词: 微机电系统; 液桥; 润湿角; 接触角; 表面张力; 毛细作用力

中图分类号: TP212 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.01.0061

A STUDY OF SHAPE AND FORCES OF LIQUID BRIDGE BETWEEN TWO SLENDER PARALLEL FLAT PLATES

ZHU Zhao-fei¹, JIA Jian-yuan¹, FU Hong-zhi², CHEN Yi-long¹, ZENG Zhi¹, YU Da-lin¹

(1. School of Mechano-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. ZTE Corporation, Shenzhen 518057, China)

Abstract: When a liquid bridge of a constant volume is formed between two surfaces, the width of a liquid-solid interface is constrained by the boundary parallel to the plate length direction and remains constant as the separation distance between those plates varies. However, the liquid bridge can expand or contract freely in length, which inevitably leads to the change in the shape parameters of the liquid bridge, thus changing the value of liquid bridge forces. According to the marginal effects of a slender liquid bridge profile, a pseudo-three-dimensional force model of a liquid bridge is developed. Then based on the characteristics of the slender structured surface and under the condition of a liquid bridge with a constant volume, an efficient method is employed to solve the differential equations directly. Finally, the relationship is explored between variable forces acting on the liquid bridge and variable shape parameters (as contact angle) and length and width with the variation of the separation distance (between parallel plates); meanwhile, the validity and practicality of the method are demonstrated by comparing the Surface Evolver (SE) simulations with those of the method employed in this paper.

Key words: micro-electro-mechanical systems (MEMS); liquid bridge; wetting angle; contact angle; surface tension; capillary force

收稿日期: 2015-01-22; 修改日期: 2015-09-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(10476019)

通讯作者: 朱朝飞(1984—), 男, 河南人, 博士生, 主要从事微电子机械系统(MEMS)研究(E-mail: zhaofeizhu@stu.xidian.edu.cn).

作者简介: 贾建援(1952—), 男, 陕西人, 教授, 硕士, 博导, 主要从事微电子机械系统(MEMS)、机电控制系统及装置研究(E-mail: jyjia@xidian.edu.cn);

付红志(1979—), 男, 江苏人, 工程师, 硕士, 主要从事通讯产品 PCBA 电子装联工艺技术研究(E-mail: fu.hongzhi@zte.com.cn);

陈轶龙(1988—), 男, 陕西人, 博士生, 主要从事微电子机械系统(MEMS)研究(E-mail: cyl.019@163.com);

曾志(1986—), 男, 陕西人, 博士生, 主要从事机电控制系统及装置的研究(E-mail: zengzhi_2012@hotmail.com);

于大林(1986—), 男, 山东人, 博士生, 主要从事机电控制系统及装置的研究(E-mail: xd_yudalin@msn.com).

随着微电子机械系统(MEMS)的应用与发展,其尺寸越来越小,表面积相对体积的比值越来越大,与面积相关的作用力(如摩擦力、毛细作用力、黏着力和表面张力等)对 MEMS 性能的影响逐渐突显,甚至具有决定性的作用^[1-6],因此针对零件间隙内液桥的力学性能的研究越来越丰富。例如:利用液桥力的微球转移操作^[3];楔形平板间液桥的运动分析^[7-8];利用有限元的方法求解斯托克斯方程研究液桥三相接触线的动力学问题^[9];平行面和不平行面间毛细管桥的稳定性研究^[10];利用光电元件的组装来分析焊点润湿性对自校准精度的影响^[11];不带电胶体颗粒间液桥的毛细力及范德华力^[12];在润湿和约束共同作用下细长液桥的曲率变化等^[13-14]。

本文以狭长刚性平行板间的液桥作为研究对象,在液桥体积恒定条件约束下从 Young-Laplace 方程出发,考虑受狭长边界约束的长条形液桥两端的边缘效应,利用张力等效方法建立液桥的拟三维形态的受力模型。将求解液桥形态微分方程组边值的问题转化为优化求解初值的问题,利用求解初值问题的高效方法得到液桥形态参数与液桥受力之间的关系。分析了表面润湿性变化对液桥在板面上的接触角、三相(液、固、气)接触线、液桥的轮廓形态和液桥受力的影响。本研究相比只从二维的角度思考这类问题的研究更加符合实际情况^[13-15]。由于在每次求解过程中,我们利用等效力平衡方程去求解液桥的形态微分方程,可以得到平板间距下降过程中的液桥形态变化并保证其满足实际物理边界约束,而且本文的方法不涉及液气界面的网格化分,因此对比利用有限元法的仿真计算过程(Surface Evolver (SE) simulations),本方法的计算速度大大提高,同时也不存在无法判断能量是否收敛到最小的问题^[16]。本研究可为芯片的自组装、液桥粘连造成的微结构失效机理、微通道的加工等工程技术领域提供理论依据^[17]。

1 狭长平行板间液桥的形态与静力平衡方程

1.1 狭长平行板间液桥的形态参数

液体静止时,液气界面与液固界面之间的夹角称为“接触角”。假设液体静置在光滑均质平面,在此特殊情况下得到的“接触角”被称为“润湿角”^[18-20]。在特定气体氛围下,润湿角的大小只与液、固两相

材料的表面张力有关^[21-24]。当遇到尖锐边缘结构或材料润湿性变化时,会出现三相接触线粘滞和接触角改变的现象,这称为“canthotaxis”效应^[18]。

如图 1 所示,材料润湿性变化对接触角 θ 的影响^[17,25]。当液体在润湿区域 I、不润湿区域 II 上的润湿角分别为 θ_r 、 θ_a 时,接触角 θ 变化范围为:当 $l_{dx} = L_x$ 时, $\theta_r \leq \theta \leq \theta_a$;当 $l_{dx} < L_x$ 时, $\theta = \theta_r$;当 $l_{dx} > L_x$ 时, $\theta = \theta_a$ ^[26]。

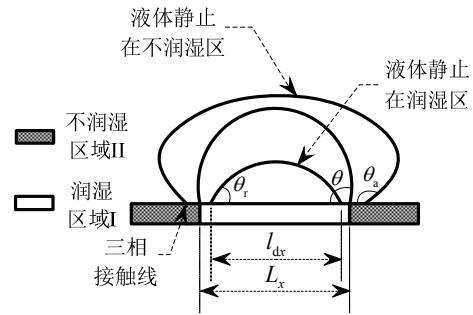


图1 润湿性变化引起接触角 θ 变化

Fig.1 Changes in contact angle θ caused by differences in wettability

如图 2 所示,本文以狭长平行板间的液桥作为研究对象。润湿区域 I 的宽为 L_x ,长为 L_y 。本文研究对象为 $L_y \gg L_x$,因此当平行板间距 z_u 发生变化时,液桥底部在长度方向 l_{dy} 不受区域 II 的约束自由伸缩,但在宽度方向受到区域 II 的约束($l_{dx} = L_x$)。忽略板面粗糙度和液体蒸发的影响,液桥两端液气界面与液固界面构成的接触角 θ 不随着平行板间距的变化而变化^[13,15,27],这称为液桥左右两端在区域 I 上的“滑移”。液桥底部宽度 l_{dx} 受不润湿性区域 II 的约束保持不变,但两侧界面的曲率、接触角随着平板间距的变化而变化,可以将此形象地称为两侧液气界面在边界约束处的“铰链转动”^[14-15]。

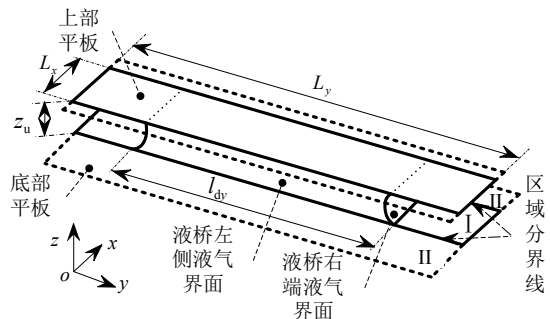


图2 液桥的三维示意图

Fig.2 Three-dimensional diagram of the liquid bridge

1.2 平行板间液桥的静力平衡方程

根据液桥的三维形态特性,将液桥的“两侧液

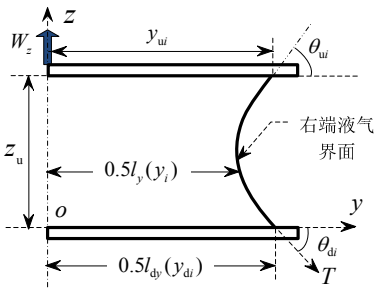
气界面”、“两端液气界面”具有的表面张力的合力等效为液桥总张力的方法建立液桥的拟三维受力模型。在笛卡尔坐标系下规定力的方向向上为正，利用液桥的对称性，液桥右端、右侧液气界面的受力分析如图 3(a)、图 3(b)所示。液桥在竖直方向的静力平衡方程为：

$$W_z + l_{dx}l_{dy}p_b - \rho gV_0 - 2T(l_{dx} \sin \theta_{di} + l_{dy} \sin \theta_{dj}) = 0 \quad (1)$$

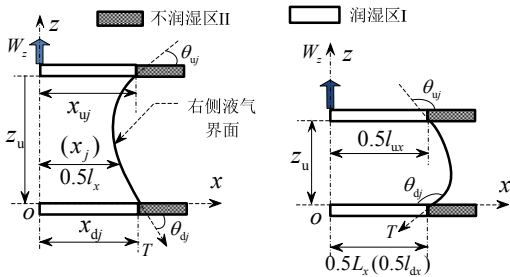
液桥底部位置处的压强 p_b 为：

$$p_b = \frac{2T(l_{dx} \sin \theta_{di} + l_{dy} \sin \theta_{dj}) + \rho gV_0 - W_z}{l_{dx}l_{dy}} \quad (2)$$

其中： ρ 为液体密度； T 为液体表面张力； l_{dy} 、 l_{dx} 为液桥底部液固界面的长、宽； θ_{di} 、 θ_{dj} 分别为液桥两端液气界面、两侧液气界面与底部液固界面构成的接触角； V_0 表示液桥体积； W_z 为上部平行板对液桥在竖直方向的作用力(包含毛细作用力和三相接触线上的表面张力在竖直方向的分量)。



(a) 两端液气界面受力简图



(b) 平行板间距不同时，两侧液气界面受力简图

图3 液桥的受力简图

Fig.3 Schematic diagram of liquid bridge forces

2 狭长矩形平行板间液桥对应的形态微分方程

2.1 Young-Laplace 方程的转化形式

根据式(1)与式(2)还不能求得未知量 W_z 和 p_b ，但静力平衡方程表明了两者与接触角及边界约束间的关系。因此为了求解未知量 W_z 和 p_b ，必须得

到相关的液桥形态表征参数，求解液桥的形态微分方程组成为解决问题的关键。在体积恒定的条件约束下，对 Young-Laplace 方程进行变形^[28]，考虑液桥两端的边缘效应，建立液桥形态参数的微分方程。根据细长液桥的大长宽比几何特性($l_y \gg l_x$ ， l_y 、 l_x 为如图 3 所示高度坐标 z 处液桥的长、宽)，两侧液气界面可以近似为柱筒型曲面的一部分，即 Young-Laplace 方程：

$$1/\gamma + 1/\gamma' = \Delta p/T \quad (3)$$

的一个主曲率半径 $\gamma' \Rightarrow \infty$ ，即 $1/\gamma' = 0$ ，两侧液气界面的曲率近似为：

$$1/\gamma = \Delta p/T \quad (4)$$

式中， Δp 为液气界面压强差，以周围大气压强作为参考基准， $\Delta p = p_b - p_z$ ，其中 $p_z = \rho g z$ 代表重力引起的液桥内部压强变化。

图 4 为液桥的右端俯视图。受板面不湿润区域 II 的约束，液桥呈现出狭长的形态。因此可以将两端液气界面在水平面截面上的曲率半径近似为液桥宽度(l_x)的一半。结合式(3)，得到两端液气界面的一主曲率近似为：

$$1/\gamma = \Delta p/T - 1/\gamma' \quad (5)$$

其中， $\gamma' = x_j = 0.5l_x$ ， x_j 为高度坐标 z 处的液桥宽度 l_x 的一半。

根据图 3 所示的液桥轮廓曲线，以高度坐标 z 为自变量可满足液气界面特征参数与压强的协调关系，得到液桥表征参数的微分表达形式。对不同的平行板间距，引入液体体积恒定的约束，得到以坐标 z 为自变量的体积微分方程。因此，液桥形态表征参数的微分方程为：

$$\begin{cases} \frac{d\theta_i}{dz} = \frac{1}{\sin \theta_i} \left(\frac{\Delta p}{T} - \frac{1}{\gamma'} \right) \\ \frac{dy_i}{dz} = 1/\tan \theta_i \\ \frac{d\theta_j}{dz} = \frac{\Delta p}{T \sin \theta_j} \\ \frac{dx_j}{dz} = 1/\tan \theta_j \\ \frac{dV}{dz} = 4x_j y_i - 2 \left(2x_j^2 - \frac{\pi x_j^2}{2} \right) \end{cases} \quad (6)$$

其中：自变量为 $z \in [0, z_u]$ ， z_u 为平行板间距(液桥高度)；下标 i 、 j 分别对应两端、两侧液气界面(如图 3 所示)； θ_i 、 θ_j 分别对应 $yo z$ 、 xoz 平面内两条轮

廓曲线的斜率角; y_i, x_j 为液桥两端、两侧液气界面轮廓曲线在 yoz, xoz 面上的横坐标。

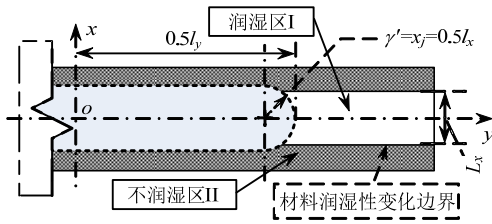


图4 液桥右端俯视图

Fig.4 Vertical view of the right end of liquid bridge

2.2 狭长平板间液桥的边界条件

根据液桥的形态特性和其所受约束可知, 两端、两侧液气界面的底部与上端的边值间存在如下关系。

当坐标 $z=z_u$ 时:

$$\begin{cases} x_j(z_u) = 0.5l_{ux} = 0.5L_x, \theta_j(z_u) = \theta_{uj}; \\ \theta_i(z_u) = \theta_{ui} = \theta_r, y_i(z_u) = 0.5l_{uy}, V(z_u) = V_0 \end{cases} \quad (7)$$

当坐标 $z=0$ 时:

$$\begin{cases} x_j(0) = 0.5l_{dx} = 0.5L_x, \theta_j(0) = \theta_{dj}; \\ \theta_i(0) = \theta_{di} = \theta_r, y_i(0) = 0.5l_{dy}, V(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\theta_{dj} \in [\theta_r, \theta_a]$ 。

微分方程组式(6)为求解非线性一阶微分方程组边值的问题, 其特点是利用一个自变量 $z \in (0, z_u)$, 求解五个未知数。因为底部接触角 θ_{di}, θ_{dj} 相互耦合, 微分方程组式(6)为可解的微分方程组。

3 形态微分方程的求解方法

3.1 边值问题等价于初值问题的方法

借助求解初值问题的高效方法, 可将式(8)的边值条件等价于初值条件, 由于初值问题的解并不能满足式(7)的边值, 故将其转化为目标函数极小化的等价问题^[29-30], 因此将边值条件式(7)等价于相对误差目标函数式(9)的极小化问题。

$$\begin{aligned} \min: F(\theta_{dj}^*, l_{dy}^*, W_z^*) = & \\ & \frac{(\theta_i(z_u) - \theta_r)^2}{(\theta_r)^2} + \frac{(x_j(z_u) - 0.5L_x)^2}{(0.5L_x)^2} + \\ & (V(z_u) - V_0)^2 / V_0^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$z_u \in (z_{u2}^*, z_{u1}^*)$ 为使液桥满足边值条件式(7)、式(8)的高度变化范围。如果两平行板间距大于 z_{u1}^* 时, 两侧液气界面在板面上的三相接触线将脱离边界约束进入不润湿性区域 II^[17-18,26]。当平行板间距小于 z_{u2}^* 时, 两侧液气界面与液固界面构成的接触角

不变, “铰链转动”现象消失, 只存在左右两端液气界面的“滑移”。

根据液桥所受的约束条件, 随着平行板间距的减小, 对应存在 $m+1$ 个液桥高度序列 ($z_u = z_u(0), z_u(1), \dots, z_u(m)$), 也会存在对应的微分方程初值序列如式(8)所示。液桥高度坐标 $z = z_u$ 时, 通过优化隐含变量(两侧接触角 θ_{dj}^* 、液桥底部长度 l_{dy}^* 、液桥顶端受力 W_z^*), 使目标函数式(9)达到期望的误差要求, 液桥上端处的边值满足式(7), 来优化求得 θ_{dj}^*, l_{dy}^* 及 W_z^* 的值。图5为求解微分方程的流程图。

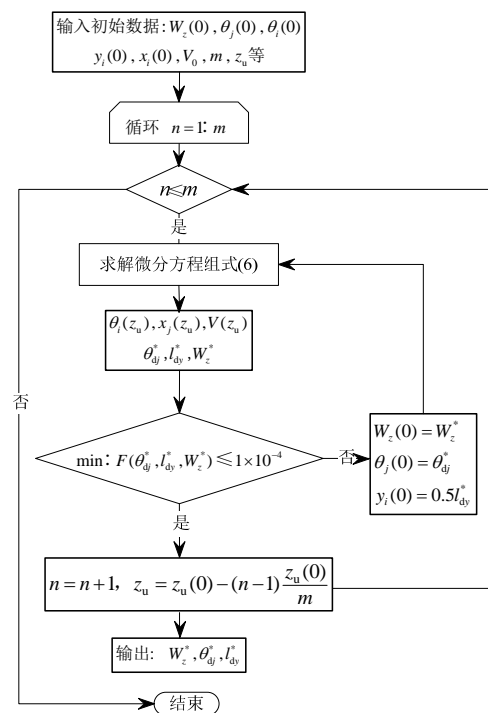


图5 求解微分方程组的流程图

Fig.5 Flowchart of solving the differential equations

3.2 满足边值问题的液桥高度变化范围

如果液桥轮廓曲线上、下端的边值满足式(7)、式(8), 当 $\theta_{dj} = \theta_j(0) = \theta_a$ 时, 根据 3.1 节中的方法, 极小化目标函数式(10)可以确定满足边值问题式(7)、式(8)的最大液桥高度 z_{u1}^* ; 当 $\theta_{dj} = \theta_j(0) = \theta_r$ 时, 同样利用 3.1 节中的方法极小化目标函数式(10), 可以确定满足约束的最小液桥高度 z_{u2}^* 。

$$\begin{aligned} \min: F(z_{ui}^*, l_{dy}^*, W_z^*) = & \\ & \frac{(\theta_i(z_{ui}^*) - \theta_r)^2}{\theta_r^2} + \frac{(x_j(z_{ui}^*) - 0.5L_x)^2}{(0.5L_x)^2} + \\ & (V(z_{ui}^*) - V_0)^2 / V_0^2 \end{aligned} \quad (10)$$

目标函数式(10)中隐含的优化变量为：平行板间距 z_u^* (z_u^* 为 z_{u1}^* 或 z_{u2}^*)，底部液固界面长度 l_{dy}^* ，液桥上端所受拉力 W_z^* 。

4 狭长液桥形态参数间的关系及其刚度特性曲线

以表 1 给定的参数为例，针对 3 种不同的润湿性区域 I，分析液桥的形态参数、受力、压强随液桥高度或底部长度的变化规律。同时为了验证本文所述方法的正确性，我们将计算结果与 SE 的仿真结果进行对比。

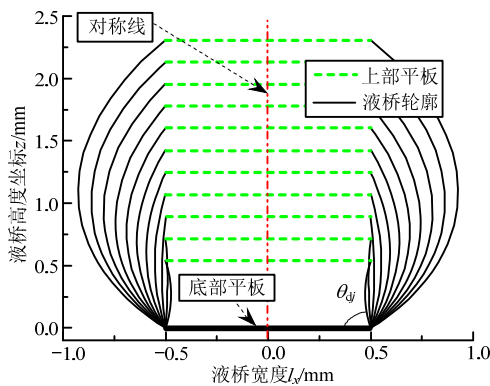
表 1 液桥与平板的参数

Table 1 Parameters of liquid bridge and the flat plates

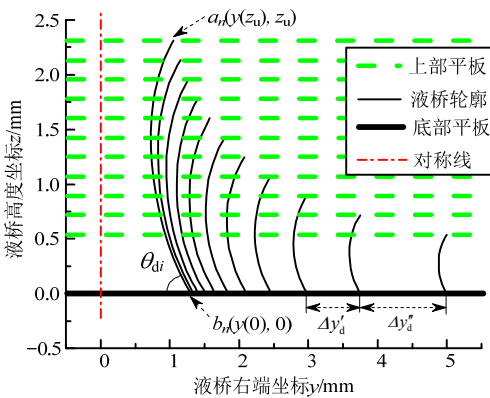
液体体积 V_0	表面张力 T	液体密度 ρ
$5/\text{mm}^3$	0.072 N/m	1000 kg/m^3
宽度 L_x	区域 I 润湿角 θ_t	区域 II 润湿角 θ_a
$1/\text{mm}$	$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$	135°

4.1 形态参数间的关系

求解微分方程组式(6)，得到满足边界条件式(7)、式(8)的液桥轮廓曲线如图 6 所示。



(a) 两侧液气界面的轮廓曲线



(b) 液桥右端液气界面的轮廓曲线

图 6 液桥轮廓曲线

Fig.6 Profiles of the liquid bridge

图 7 中， z_u / l_{dx} 为两平板间距(液桥高度)与液桥底部宽度的比值； $\delta l_y = |2(y(0) - y(z_u)) / l_{dx}|$ 为特定液桥高度时，液桥上端长度相对底部长度的变化量； $\delta y_{du} = |(y(0) - y(z_u)) / y(0)| \times 100$ 为液桥上端长度与底部长度之差占底部长度的百分比。结合图 6(b)与图 7 可知，平行板间距较大时($z_u / l_{dx} > 1.5$)，液体的形态受重力影响较大，液桥轮廓曲线与上、下平板交点 a_n 、 b_n 的横坐标相差较大；在 $z_u / l_{dx} \leq 1.5$ 之后，随着液桥高度的降低， $|y(0) - y(z_u)| \Rightarrow 0$ ，重力对液桥形态的影响逐渐减小，两端液气界面投影在 yoz 面上的左右轮廓曲线逐渐近似为圆弧。

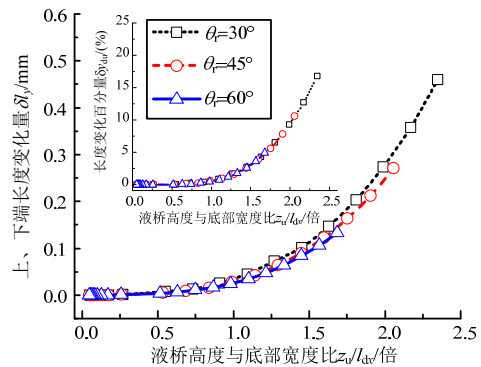


图 7 液桥上端长度相对底部长度的变化量

Fig.7 Variations of the upper end length with the bottom length of the liquid bridge

由图 8 可知，区域 I 的润湿性变化，不影响液桥长度变化趋势，利用本文所述方法得到的底部液固界面长度与 SE 的仿真结果吻合度较好。图 9 中 $\Delta l_{dy} = 100(l_{dy} - l_{dy}^*) / (l_{dy}^*)$ 表示在相同液桥间距下，本文计算的液桥底部长度与 SE 仿真结果的差距。液桥高度较大时($z_u / l_{dx} > 1.5$)，本文计算得到的液桥底部长度较 SE 仿真结果要短，存在着一定差别。因为液桥高度较大时其长宽比较小，所以对两侧液气界面做柱筒型曲面的假设将偏离实际情况，即式(3)中的一个主曲率半径近似为 $\gamma' \Rightarrow \infty$ 不成立。随着平行板间距的减小，长宽比增大，利用本文所述方法得到的底部液固界面长度与 SE 的仿真结果吻合度越来越高($\Delta l_{dy} \Rightarrow 0$)。

由图 10(a)可以看出，随着 z_u / l_{dx} 的减小，两侧接触角 θ_{dj} 不断减小，这与文献[14]中的实验结果及 SE 的仿真结果相吻合。在液桥高度较大时($z_u / l_{dx} > 1.5$)，由于对两侧界面作柱筒型曲面的假设存在较大误差，两侧接触 θ_{dj} 与 SE 仿真结果的差别较大，但随着液桥高度的减小，这种误差逐渐消

失。由图 10(b)可知, 针对三种润湿性区域 I(θ_r 为 30° 、 45° 、 60°), 接触角 θ_{dj} 的变化范围为 $[\theta_r, \theta_a]$, (θ_a 为 135°)。随着液桥长宽比的增大, θ_{dj} 的减小幅度变缓, 并趋向润湿角 θ_r 。 z_u/l_{dx} 足够小之后, 液桥两侧液气界面将停止“铰链转动”。

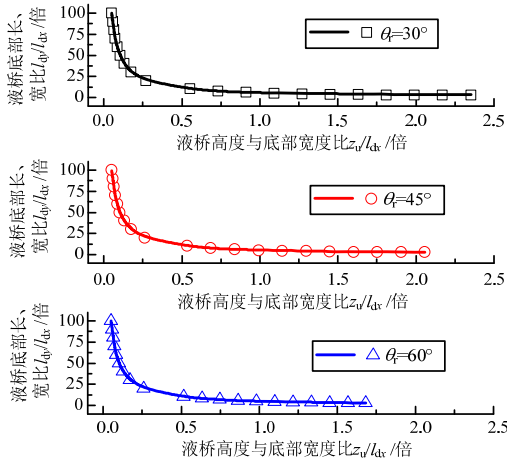


图 8 液桥底部长宽比与高度的关系曲线, 其中数据点对应本文方法的计算结果; 曲线为 SE 的仿真结果

Fig.8 Variations of the aspect ratio (length/width) at the bottom of the liquid bridges with their height. The data points are as obtained with our theory and the curves are those obtained from the Surface Evolver simulations

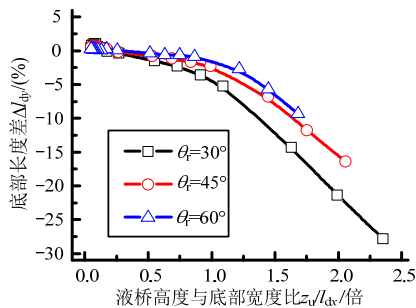
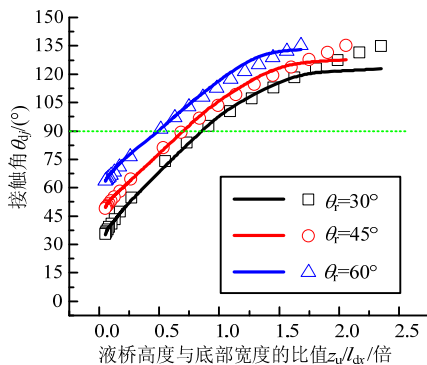
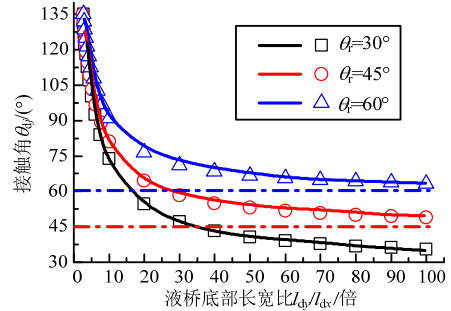


图 9 底部长度与 SE 仿真结果的差别

Fig.9 Differences between the bottom length obtained from our methods and the SE simulations



(a) 两侧接触角 θ_{dj} 随高宽比的变化



(b) 两侧接触角 θ_{dj} 随液桥底部长宽比的变化

图 10 两侧接触角 θ_{dj} 的变化, 其中数据点对应本文方法的计算结果; 曲线为 SE 的仿真结果

Fig.10 Changes in contact angle θ_{dj} at both sides. The data points are as obtained with our theory and the curves are those obtained from the Surface Evolver simulations

4.2 液桥的刚度特性曲线

我们将液桥上端受力 W_z 与高度 z_u 的关系曲线称为液桥的“纵向刚度特性曲线”; W_z 与液桥底部长度 l_{dy} 的关系曲线称为液桥的“横向刚度特性曲线”; 底部毛细作用力 F_b 与液桥高度 z_u 、底部长度 l_{dy} 的关系曲线分别称为“纵向毛细刚度特性曲线”、“横向毛细刚度特性曲线”。

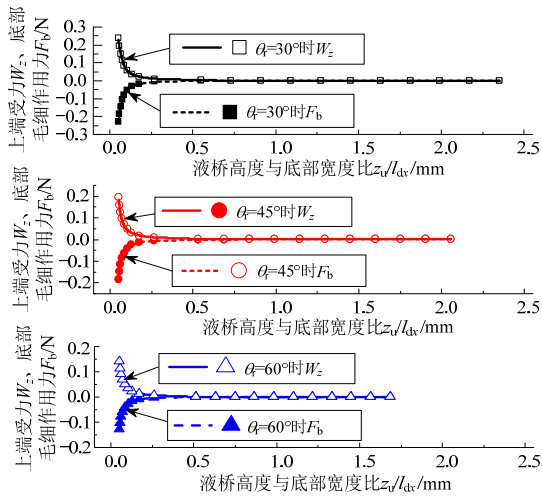
W_z 、 F_b 的“纵向刚度特性曲线”如图 11(a)所示。图 11(b)表示 W_z 、 F_b 的“横向刚度特性曲线”。结合式(1)可知 W_z 与液桥形态参数之间存在如下关系:

$$W_z = 2Tl_{dx}(\sin\theta_{di}) + 2Tl_{dy}(\sin\theta_{dj}) + \rho gV_0 - l_{dx}l_{dy}p_b \quad (11)$$

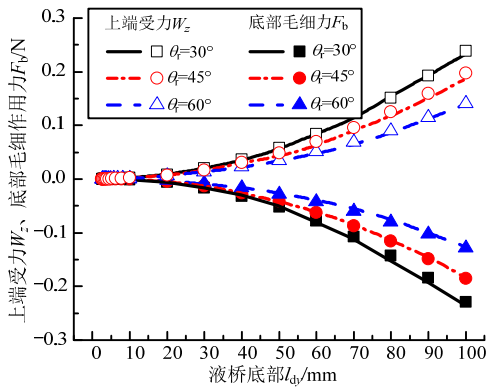
F_b 与液桥形态特征参数之间存在如下关系:

$$F_b = l_{dx}l_{dy}p_b \quad (12)$$

W_z 的变化主要与 l_{dy} 、 p_b 、 θ_{dj} 有关; F_b 的变化主要受 l_{dy} 、 p_b 的影响。由图 11(a)可得, 当 $z_u \geq 0.5$ mm 时, 虽然液桥高度 z_u 的减小很多, 但液桥上端受到的作用力 W_z 、底部毛细作用力 F_b 都变化很小, 即力对平行板间距变化的敏感度很低。当 $z_u < 0.5$ mm 时, 随着 z_u 的小幅度减小就会引起 W_z 、 F_b 的刚度特性曲线呈指数型变化, 即液桥所受作用力对平行板间距变化的敏感度很高。随着 z_u 的进一步减小, θ_{dj} 变化趋缓, 对液桥受力变化的影响也逐渐减小, 此时液桥受力变化, 主要受 p_b 、 l_{dy} 的变化规律影响。通过图 11(b)可以看出, 随着液桥的伸长, 材料润湿性对液桥受力的影响越来越大, 在同样的液桥长度下, 润湿角越小, 液桥受力越大。利用本文所述方法得到的液桥受力与 SE 的仿真结果吻合度较好, 尤其在大长宽比时, 吻合度进一步增加。



(a) W_z 、 F_b 与液桥高度的关系曲线



(b) W_z 、 F_b 与液桥长度的关系曲线

图 11 刚度特性曲线，其中各点数据对应本文方法的计算结果；曲线为 SE 的仿真结果。

Fig.11 Curves of the stiffness characteristics. The data points are as obtained with our theory and the curves are those obtained from the Surface Evolver simulations

由图 12 可知，随着液桥高度的减小，液桥底部压强 p_b 减小。 $z_u \approx 0.8$ mm 时， p_b 由正值变为负值，

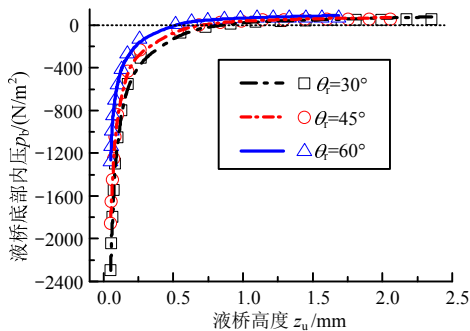


图 12 液桥底部压强与高度的关系曲线，其中数据点对应本文方法的计算结果；曲线为 SE 的仿真结果

Fig.12 Variations of the bottom pressure in the liquid bridges with their height, The data points are as obtained with our theory and the curves are those obtained from the Surface Evolver simulations

液桥底部的毛细力 F_b 同样由正值变为负值，这说明平行板间距小到一定程度后， F_b 对上、下平板都是拉力，并且随着平行板间距的减小， p_b 的变化幅度逐渐变大，这些都与 SE 的仿真结果相吻合。

5 结论

根据狭长约束边界对液桥形态特征的作用，本文通过张力等效方法建立液桥的拟三维形态的受力模型，并结合液桥形态微分方程的初值、终值条件，求解形态微分方程得到液桥的形态特征参数；根据接触角的变化特点，分析了液桥在润湿区域 I 内的变化规律；再进一步分析液桥受力与平行板间距的灵敏度关系，得到液桥的刚度特性曲线；最后分析了液桥底部压强变化情况。本文得到的液桥形态特征参数和受力的变化规律较好的吻合了狭长平行板间液桥的实际变化情况以及 SE 仿真的结果。相对 SE 仿真所采用的方法，本文介绍的方法大大加快了处理此类问题的速度，而且克服了 SE 所存在的格面交叉及无法判断能量是否达到最小的问题。对此类问题的研究具有参考价值。

参考文献：

- [1] 聂志峰, 周慎杰, 韩汝军, 等. 应变梯度弹性理论下微构件尺寸效应的数值研究[J]. 工程力学, 2012, 29(6): 38-46.
Nie Zhifeng, Zhou Shenjie, Han Rujun, et al. Numerical study on size effects of the microstructures based on strain gradient elasticity [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(6): 38-46. (in Chinese)
- [2] 陆静, 向宇, 袁丽芸, 等. 考虑边缘效应的微镜静电力学性能分析[J]. 工程力学, 2008, 25(7): 235-240.
Lu Jing, Xiang Yu, Yuan Liyun, et al. Analysis of electrostatic mechanical characteristics of micro-mirror with edge effects [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(7): 235-240. (in Chinese)
- [3] 郭百巍, 刘兵, 汪家道, 等. 利用液体桥力的微球转移操作[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2005, 45(5): 647-650.
Guo Baiwei, Liu Bing, Wang Jiadao, et al. Manipulation of micro sphere move using liquid bridge forces [J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2005, 45(5): 647-650. (in Chinese)
- [4] 刘思思, 张朝辉, 刘俊铭. 微平面接触分离中弯月面力的计算[J]. 物理学报, 2010, 59(10): 6902-6907.
Liu Sisi, Zhang Chaohui, Liu Junming. Calculation of meniscus force during separation of microspheres [J]. Acta Physica Sinica. 2010, 59(10): 6902-6907. (in Chinese)

- [5] 赵亚溥. 纳米与介观力学[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 3—5.
Zhao Yapu. Nano and mesoscopic mechanics [M]. Beijing: Science Press, 2014: 3—5. (in Chinese)
- [6] Zhao Y P, Wang L S, Yu T X. Mechanics of adhesion in MEMS—a review [J]. *Journal of Adhesion Science and Technology*, 2003, 17(4): 519—546.
- [7] Bush J W M, Peaudecerf F, Prakash M, et al. On a tweezer for droplets [J]. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2010, 161(1/2): 10—14.
- [8] Luo C, Heng X, Xiang M. Behavior of a liquid drop between two nonparallel plates [J]. *Langmuir*, 2014, 30(28): 8373—8380.
- [9] Dodds S, Carvalho M S, Kumar S. The dynamics of three-dimensional liquid bridges with pinned and moving contact lines [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, 707(1): 521—540.
- [10] Chen T, Tsamopoulos J A, Good R J. Capillary bridges between parallel and non-parallel surfaces and their stability [J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1992, 151(1): 49—69.
- [11] Kong M, Jeon S, Hwang C, et al. Influences of solder wetting on self-alignment accuracy and modeling for optoelectronic devices assembly [J]. *Journal of Electronic Packaging*, 2012, 134(2): 021002—021011.
- [12] Megias-Alguacil D, Gauckler L J. Capillary and van der Waals forces between uncharged colloidal particles linked by a liquid bridge [J]. *Colloid and Polymer Science*, 2010, 288(2): 133—139.
- [13] Swain P S, Lipowsky. Wetting between structured surfaces: Liquid bridges and induced forces [J]. *EPL (Europhysics Letters)*, 2000, 49(2): 203—209.
- [14] Broesch D J, Frechette J. From concave to convex: Capillary Bridges in slit pore geometry [J]. *Langmuir*, 2012, 28(44): 15548—15554.
- [15] Broesch D J, Dutka F, Frechette J. Curvature of Capillary Bridges as a competition between wetting and confinement [J]. *Langmuir*, 2013, 29(50): 15558—15564.
- [16] Brakke K A. The surface evolver [J]. *Experimental Mathematics*. 1992, 1(2): 141—165.
- [17] Gau H, Herminghaus S, Lenz P, et al. Liquid morphologies on structured surfaces: from microchannels to microchips [J]. *Science*, 1999, 283(5398): 46—49.
- [18] Langbein D. Canthotaxis/wetting barriers/pinning lines [M]// Langbein D. *Capillary surfaces*. Springer Berlin Heidelberg, 2002: 149—177.
- [19] Butt H, Vollmer D, Papadopoulos P. Super liquid-repellent layers: The smaller the better [J]. *Advances in Colloid and Interface Science* 2015, 222(1): 104—109.
- [20] Bonn D, Eggers J, Indekeu J, et al. Wetting and spreading [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2009, 81(2): 739—805
- [21] 赵亚溥. 表面与界面物理力学[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 171—174.
Zhao Yapu. *Surface and interface physics mechanics* [M]. Beijing: Science Press, 2012: 171—174. (in Chinese)
- [22] Gaulke D, Dreyer M E. Capillary rise between parallel perforated plates in microgravity [J]. *Journal of Physical Science and Application*, 2014, 4(5): 277—290.
- [23] de Gennes P G. Wetting: statics and dynamics [J]. *Reviews of Modern Physics*, 1985, 57(3): 827—863.
- [24] Herminghaus S, Brinkmann M, Seemann R. Wetting and dewetting of complex surface geometries [J]. *Annual Review of Materials Research*, 2008, 38(1): 101—121.
- [25] Liu J, Xia R, Zhou X. A new look on wetting models: continuum analysis [J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2012, 55(11): 2158—2166.
- [26] Lipowsky R, Lenz P, Swain P S. Wetting and dewetting of structured and imprinted surfaces [J]. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2000, 161(1): 3—22.
- [27] Lipowsky R. Morphological wetting transitions at chemically structured surfaces [J]. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 2001, 6(1): 40—48.
- [28] Padday J F. The profiles of axially symmetric menisci [EB/OL]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1971, 269(1197): 265—239.
- [29] Rio O I, Neumann A W. Axisymmetric drop shape analysis: computational methods for the measurement of interfacial properties from the shape and dimensions of pendant and sessile drops [J]. *Journal of Colloid and Interface Science*; 1997, 196(2): 136—147.
- [30] Shampine L F, Corless R M. Initial value problems for ODEs in problem solving environments [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 125(1/2): 31—40.