

文章编号: 1000-4750(2016)06-0138-08

# 基于改进MCMC方法的有限元模型修正研究

刘 纲<sup>1,2</sup>, 罗 钧<sup>2</sup>, 秦 阳<sup>2</sup>, 张建新<sup>2</sup>

(1. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400030; 2. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045)

**摘 要:** 针对马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)模型修正方法在待修正参数维数较高时不易收敛和计算效率低下的问题, 建立了融合自适应算法和相关向量机的快速模型修正方法。基于广义无偏见先验分布, 推导了待修正参数的后验分布; 在标准MCMC方法的基础上, 引入延缓拒绝算法以提高新样本接受概率; 引入自适应算法以自主调整建议分布的带宽。通过相关向量机建立待修正参数与有限元模型理论计算值之间的回归模型, 以提高模型修正的计算效率。数值模拟和试验结构的模型修正结果表明, 该方法的收敛速度较快, 计算效率优于传统的一阶优化模型修正方法, 为解决不确定性模型修正中的计算效率提供了一种新手段。

**关键词:** 模型修正; 贝叶斯估计; MCMC; 自适应; 相关向量机

中图分类号: TU311 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.10.0887

## A FINITE ELEMENT MODEL UPDATING METHOD BASED ON IMPROVED MCMC METHOD

LIU Gang<sup>1,2</sup>, LUO Jun<sup>2</sup>, QIN Yang<sup>2</sup>, ZHANG Jian-xin<sup>2</sup>

(1. The Key Laboratory of New Technology for Construction of

Cities in Mountain Area of the Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

2. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** To copy with the shortage of the convergence and computational efficiency in high dimension parameters, a fast finite element model updating method is proposed based on an adaptive fusion algorithm and its relevance vector machine. The posterior distribution for correction parameters is deduced based on the generalized without prejudice prior distribution. An adaptive algorithm is introduced to adjust the bandwidth of the proposal distribution based on Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation method. Refusal by a delaying algorithm is introduced to improve the new sample acceptance probability. In order to improve the computational efficiency, the regression model between the correction parameters and the theoretical calculation values of the finite element model is established. Simulation and experimental results show that the method owns fast convergence speed and computation efficiency. It is superior to the traditional first-order optimization model modification method, providing a new way to improve the calculation efficiency of uncertainty model updating.

**Key words:** model updating; Bayesian estimation; MCMC; adaptive; relevance vector machine

在土木工程中, 有限元方法已成为最基本、使用最广泛的结构分析手段。但因实际结构中材料物理参数、边界条件较难准确测量以及观测误差等因

素<sup>[1-2]</sup>, 根据设计图纸建立的初始有限元模型的计算值与实际结构的测试值将不可避免地存在差异, 极大限制了有限元方法在结构优化设计、振动控制

收稿日期: 2014-10-22; 修改日期: 2015-11-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(51578095); 中央高校基金项目(CDJZR14205501)

通讯作者: 刘 纲(1977-), 男, 四川人, 副教授, 博士, 从事结构健康监测与振动控制研究(E-mail: gliu@cqu.edu.cn).

作者简介: 罗 钧(1986-), 男, 四川人, 博士生, 从事结构健康监测研究(E-mail: jlue@cqu.edu.cn);

秦 阳(1991-), 男, 重庆人, 博士生, 从事结构防灾减灾与健康监测研究(E-mail: denxiaolan@sian.com);

张建新(1987-), 男, 浙江人, 助理工程师, 硕士, 从事结构健康监测研究(E-mail: 261521898@qq.com).

和损伤识别方面的应用。近三十年来, 业界提出了有限元模型修正方法以减少这种差异, 并逐步发展为土木工程界的一个重要研究方向<sup>[3-5]</sup>。

有限元模型修正的基本思路是选取有限元模型中的参数或结构刚度、质量矩阵中的元素为待修正参数, 通过寻优数值算法更新待修正参数, 使更新后的有限元模型的计算值与实际结构的测试值趋同<sup>[5]</sup>。根据将待修正参数视为确定的数还是随机变量, 有限元模型修正可分为确定性方法和不确定性方法<sup>[6]</sup>。传统的确定性修正方法仅能根据某次测试值进行模型修正, 更新后的有限元模型只能重现特定情形下的试验结果, 无法利用对实际结构多次测试的信息, 而这些信息对消除测试误差、环境干扰、离散误差中的不确定性因素有重要作用。同时, 传统的确定性修正方法也无法给出修正后有限元模型计算值的置信度<sup>[7]</sup>。

不确定性模型修正采用全部的测试值进行模型修正, 能综合考虑不确定性因素的影响, 有效克服了确定性模型修正的不足<sup>[8-9]</sup>。例如, 随机有限元<sup>[10]</sup>和摄动法<sup>[11]</sup>等基于概率统计的技术采用待修正参数的统计矩和有效区间进行模型修正。另一种有效的不确定性模型修正方法是基于贝叶斯原理的模型修正方法。Beck教授等<sup>[12]</sup>首次将贝叶斯理论应用于土木工程领域中的模型修正中, 其利用Laplace渐近法将后验概率密度函数近似为正态分布, 实现了两自由度剪切框架的模型修正; 文献<sup>[13]</sup>提出了一种基于Metropolis-Hastings(MH)算法的Markov Chain Monte Carlo(MCMC)方法, 并通过两自由度模型验证了该方法的有效性; 易伟建<sup>[14]</sup>等利用基于贝叶斯理论的MH-MCMC算法(以下简称MH算法), 成功实现了4层实验室结构基于模型修正策略的损伤识别; 文献<sup>[15]</sup>对贝叶斯方法在模型修正方面的应用进行了全面介绍。

随着待修正参数维数的增加, MH算法在循环计算中易出现“停滞”现象, 即在较多迭代步的解均为同一样本, 导致所得样本集无法充分在解空间中均匀分布。另一方面, MH算法在迭代求解过程中需不断调用有限元模型进行计算, 致使其计算效率十分低下。针对以上不足, 本文首先在广义先验分布的假设下, 基于贝叶斯理论推导了待修正参数的理论后验分布。将延缓拒绝(DR)算法引入MH算法以提高新样本的接受概率, 从而克服MH算法的“停滞”现象; 引入自适应算法(AM)以自主调整产

生新样本的方差, 从而提高采样效率。然后, 结合相关向量机建立待修正参数与有限元模型理论计算值之间的回归模型, 通过数值模型代替有限元模型进行结构响应的计算以提高效率。最后, 采用数值模拟和试验结构验证所提方法的有效性。

## 1 贝叶斯有限元模型修正

### 1.1 基于贝叶斯的模型修正

有限元模型修正往往采用实测数据更新初始的待修正参数得到修正后的参数, 这一过程可用贝叶斯公式表达为<sup>[16]</sup>:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\theta} p(y|\theta)\pi(\theta)d\theta} = c \cdot p(x|\theta)\pi(\theta) \quad (1)$$

式中:  $\pi(\theta)$ 为待修参数  $\theta$  的先验分布;  $p(x|\theta)$ 为在  $\theta$  给定下的条件分布, 通常称为似然函数;  $c$  为分母的倒数, 是一个不依赖于  $\theta$  的常数因子。

在土木工程结构中, 待修正参数  $\theta$  多选用单元的弹性模量、材料的质量密度、支座刚度等, 其先验分布通常是未知的, 但这些参量有明确的物理意义, 可大致确定其范围, 故依据贝叶斯假设采用均匀无偏见的广义先验<sup>[16]</sup>:

$$\pi(\theta_i) = 1, \quad \theta_i \in [a_i, b_i], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

式中:  $a$ 、 $b$  分别为参数的上、下限值;  $m$  为待修正参数的个数。假设结构测试的频率和振型等组成的向量为  $\mathbf{Z}^*$ , 其与有限元模型的理论计算值  $\mathbf{Z}(\theta)$  之间符合如下的线性假设:

$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}(\theta) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

式中:  $\theta$  为所有待修正参数组成的向量;  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^m$  表示测试误差、环境波动等不确定性因素产生的差值向量, 通常假设其是均值为零, 协方差为  $\text{cov}$  的正态分布。假设共进行  $s$  次试验且各次试验独立, 则贝叶斯公式中似然函数的表达式为:

$$\begin{cases} p(\mathbf{Z}|\theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi \text{cov}})^s} \exp\{-J(\theta)\} \\ J(\theta) = \sum_{i=1}^s [\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}(\theta)_i]^T \text{cov}^{-1} [\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}(\theta)_i] \end{cases} \quad (4)$$

将先验分布和似然函数代入式(1), 可得:

$$p(\theta|\mathbf{Z}) = c' \exp\left\{\sum_{i=1}^s [\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}(\theta)_i]^T \text{cov}^{-1} [\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}(\theta)_i]\right\} \quad (5)$$

当测试了结构的  $n$  阶频率和振型时, 式(5)可进一步详写为:

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z}) = c' \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}J'(\boldsymbol{\theta})\right] \\ J'(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^s (\omega_{ri}^* - \omega_r(\boldsymbol{\theta}))^2 / \text{cov}_\omega + \\ (\varphi_{ri}^* - \varphi_r(\boldsymbol{\theta}))^2 / \text{cov}_\varphi \end{cases} \quad (6)$$

式中： $\omega$ 、 $\varphi$  分别表示结构的频率和振型； $c'$  为常数。式(6)中频率和振型的计算值是  $\boldsymbol{\theta}$  的函数，且绝大多数情况下该函数无显式表达式，故仅能借助于数值算法求解后验参数的分布。

## 1.2 MH-MCMC算法

MH算法通过抽样获取后验分布  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z})$  的样本，然后根据大数定理，可获得修正后参数  $\boldsymbol{\theta}$  的均值和方差等统计特征，从而获得修正后的有限元参数。针对有限元模型修正，该算法的主要步骤为<sup>[13,15]</sup>：

- 1) 选择具有物理意义的待修正参数初始值  $\boldsymbol{\theta}_0$ ，使得  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Z}) > 0$ ；
- 2) 利用当前  $\boldsymbol{\theta}_t$  值，依据建议分布  $q(\boldsymbol{\theta}^*|\boldsymbol{\theta}_t)$  产生一个候选样本  $\boldsymbol{\theta}^*$ ；
- 3) 根据式(6)，计算接受概率  $\alpha = \min[1, p(\boldsymbol{\theta}^*|\mathbf{Z})/p(\boldsymbol{\theta}_t|\mathbf{Z})] = \min[1, \exp[J(\boldsymbol{\theta}_t) - J(\boldsymbol{\theta}^*)]$ ；
- 4) 从  $[0, 1]$  均匀分布中随机产生一个变量  $u$ ，当  $\alpha > u$  时，接受候选样本  $\boldsymbol{\theta}^*$ ，即  $\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}^*$ ；如  $\alpha < u$  时，拒绝候选样本  $\boldsymbol{\theta}^*$ ，取  $\boldsymbol{\theta}_{t+1} = \boldsymbol{\theta}_t$ 。然后从第2)步开始重新迭代；
- 5) 重复步骤2)~步骤4)，直到一定迭代次数或样本  $\boldsymbol{\theta}$  的方差小于某设定值时终止迭代。得到样本序列  $\{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{D_s}\}$ ，其中  $D_s$  为迭代的次数。

6) 取稳定后的样本序列估计参数  $\boldsymbol{\theta}$  的统计特征，从而得到修正后的参数值。

因高斯分布应用广泛且计算方便，故本文的建议分布采用高斯分布。

## 2 DRAM-MH算法

### 2.1 延缓拒绝算法(DR)

从 MH 算法的计算步骤可知，当候选样本  $\boldsymbol{\theta}^*$  被拒绝后，将进入下一步迭代计算。若连续多步迭代均拒绝  $\boldsymbol{\theta}^*$ ，将出现样本“停滞”现象，此时可采用 DR 算法来提高新样本的接受概率<sup>[17]</sup>，即当 MH 算法第  $t$  迭代步拒绝  $\boldsymbol{\theta}^*$  时，先不进入下一步迭代，而是利用已有原样本  $\boldsymbol{\theta}_t$  和被拒绝的样本  $\boldsymbol{\theta}^*$ ，利用第二次建议分布  $q_2$  再次产生新的候选样本  $\boldsymbol{\theta}^{**}$ ，然后计算  $\boldsymbol{\theta}^{**}$  的接受概率  $\alpha_2$ ：

$$\alpha_2 = \min\left(1, \frac{\pi(\boldsymbol{\theta}^*)q(\boldsymbol{\theta}^*|\boldsymbol{\theta}_t)q_2(\boldsymbol{\theta}^{**}, \boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}_t)(1-\alpha)}{\pi(\boldsymbol{\theta}_t)q(\boldsymbol{\theta}_t|\boldsymbol{\theta}^*)q_2(\boldsymbol{\theta}_t, \boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}^{**})(1-\alpha)}\right) \quad (7)$$

最后根据 MH 算法第 4)步再次判断是否接受  $\boldsymbol{\theta}^{**}$ 。这一过程在第  $t$  迭代步可重复执行，通常重复 3 次即可取得较好的效果<sup>[17]</sup>。DR 算法通过对建议分布进行一定的适应性调整解决样本“停滞”现象，提高了样本的遍历性。这种调整仅停留在某迭代步内，故属于局部自适应性方法。

### 2.2 自适应 Metropolis 算法(AM)

在 MH 算法中，建议分布的方差在迭代过程中通常为固定值。但在迭代计算的初期，建议分布需采用较大的方差，以全局搜索待修正参数的真实分布范围；在迭代后期，需减小建议分布的方差，以改变建议分布的空间延展度和方向性，自适应地逼近目标分布，从而提高采样效率。这一过程可通过在 MH 算法中引入 AM 策略自适应改变建议分布的协方差  $\mathbf{C}_t$  实现<sup>[17]</sup>：

$$\mathbf{C}_t = \begin{cases} \mathbf{C}_0, t < N_0 \\ s_d \text{cov}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) + s_d \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I}_d, t \geq N_0 \end{cases} \quad (8)$$

式中： $\boldsymbol{\varepsilon}$  为较小的正数，以保证  $\mathbf{C}_t$  的非奇异性，常取  $10^{-5}$ ； $\mathbf{C}_0$  为初始协方差； $s_d$  为比例因子，通常取为  $s_d = 5.76/m$ ， $m$  为待修正参数的维数； $\mathbf{I}_d$  是  $m$  维的单位矩阵； $\text{cov}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{t-1})$  为历史样本的协方差矩阵； $N_0$  为整数，表示迭代步数。根据样本协方差定义，当  $t \geq N_0$  时可得  $\mathbf{C}_t$  的递推公式：

$$\mathbf{C}_{t+1} = \mathbf{C}_t(t-1)/t + s_d [t \bar{\boldsymbol{\theta}}_{t-1} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}^T - (t+1) \bar{\boldsymbol{\theta}}_t \bar{\boldsymbol{\theta}}_t^T + \boldsymbol{\theta}_t \boldsymbol{\theta}_t^T + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I}_d] / t \quad (9)$$

式中， $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}$  表示取  $t-1$  步以前所有参数的均值。从以上过程可知，AM 算法采用了全局自适应调整策略，是一种全局自适应方法。

## 3 基于相关向量机的贝叶斯模型修正

将引入 DR 和 AM 算法的 MH 算法称为 DRAM 算法。该算法虽通过局部和全局自适应策略提高了样本的遍历性，但需进行大量的迭代计算且每次抽样均需调用有限元模型进行结构响应计算，因而计算效率十分低下。笔者采用相关向量机(Relevance vector machine, RVM)作为数值回归模型，通过回归模型代替有限元模型进行结构响应计算以大幅提高效率。

对由待修正参数  $\boldsymbol{\theta}$  和结构响应  $\mathbf{Y}$  组成的训练集  $\{\mathbf{Y}_i, \boldsymbol{\theta}_i\} (i=1, 2, \dots, M, M \text{ 为训练集的个数})$ ，建立相关

向量机的回归模型<sup>[18]</sup>:

$$Y_i = F(\theta_i; \mathbf{w}) + \varepsilon_i \quad (10)$$

其中:  $F(\theta_i; \mathbf{w}) = \sum w_i k(x, x_i) + w_0 = \Phi \mathbf{w}$ ;  $\mathbf{w}$  为权重向量;  $k$  为核函数, 本文选取常用的高斯函数;  $\Phi$  为设计矩阵;  $\varepsilon_i$  为噪声项, 通常假设是均值为零, 标准差为  $\sigma$  的高斯分布。  $\Phi$  和  $\mathbf{w}$  的具体表达式为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & k(x_1, x_1) & \cdots & k(x_1, x_m) \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k(x_m, x_1) & \cdots & k(x_m, x_m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(10)中回归模型的未知参数包括权重向量  $\mathbf{w}$  和噪声项的标准差  $\sigma$ 。相关向量机采用训练集通过贝叶斯公式计算这两项未知参数, 然后使用计算所得未知参数的分布和式(10)预测结构响应值, 其具体步骤为:

1) 假定未知参数  $\mathbf{w}$  和  $\sigma$  的先验分布;

2) 通过训练集构造的似然函数  $p(\theta|\mathbf{w}, \sigma)$  和先验信息, 利用贝叶斯公式得到  $\mathbf{w}$  和  $\sigma$  的后验分布  $p(\mathbf{w}, \sigma|\theta)$ ;

3) 将后验分布  $p(\mathbf{w}, \sigma|\theta)$  作为未知参数  $\mathbf{w}$  和  $\sigma$  的先验分布, 通过式(10)对新样本  $\theta^*$  相应的  $Y^*$  做出预测。

在第 2) 步中, 采用多层先验分布减弱先验分布假设不准确带来的误差, 即假定权重向量  $\mathbf{w}$  服从均值为零, 方差为  $\alpha^{-1}$  的正态分布; 对误差标准差  $\sigma$ , 取  $\sigma^{-2} = \beta$ 。其中,  $\alpha$  和  $\beta$  为多层先验分布中的超参数, 定义如下:

$$\begin{cases} p(\mathbf{w} | \alpha) = \prod_{i=1}^N N(w_i | 0, \alpha_i^{-1}) \\ \alpha \sim \text{Gamma}(c, d) \quad \beta \sim \text{Gamma}(f, g) \end{cases} \quad (12)$$

式中, Gamma 为伽玛分布。对于多层先验的超参数系数  $c, d, f, g$  一般取  $10^{-4}$ 。

将结合相关向量机的 DRAM 算法称为 RVM-DRAM 算法, 其具体的计算流程如图 1 所示。

## 4 算例及分析

### 4.1 数值模型

某五层剪切型框架结构如图 2 所示。取楼层剪切刚度为待修正参数, 设其是符合正态分布的随机变量, 均值分别为  $k_1=0.8k, k_2=1.2 \times 2k, k_3=1.5 \times 3k, k_4=0.6 \times 3k, k_5=0.5 \times 3k$  ( $k=600 \text{ kN/m}$ ), 标准差均为 0.1。各楼层质量为确定性值, 分别取为  $m_1=1000 \text{ kg}$ ,

$m_2=1.5m_1, m_3=m_4=2.0m_1, m_5=2.5m_1$ 。

在进行模型修正之前, 先采用相关向量机建立待修正参数和结构响应的回归关系。为便于计算, 取修正后刚度  $k_i^u$  与  $k_i$  之比作为待修正参数的度量, 即  $\theta_i = k_i^u / k_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ )。取所有待修正参数  $\theta$  的边界为  $[0.1, 5.0]$ 。因 Latin 方抽样是在分层抽样的基础上再进行随机抽样, 能够较好地保证样本在整个空间中的均匀分布, 故采用 Latin 方抽样方法对 5 个刚度参数  $k$  抽取 2000 个训练样本, 并计算其对应的结构响应, 然后利用 RVM 算法拟合 5 阶频率的回归模型, 其中第 1 阶频率  $f_1$  与  $k_1$  和  $k_2$  的关系如图 3 所示。然后再随机抽取 400 个验证样本, 计算预测各阶模态频率的均方根误差 RMSE 如表 1 所示。

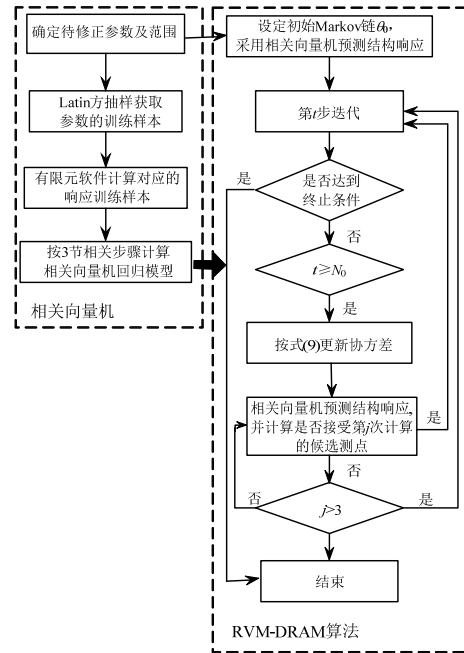


图 1 RVM-DRAM 算法修正流程

Fig.1 Flowchart of the RVM-DRAM algorithm

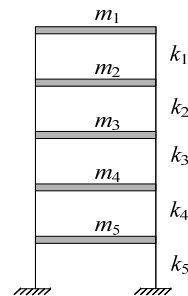


图 2 五层框架结构

Fig.2 Five-story frame structure

从图 3 可知, RVM 拟合曲面和真实曲面贴合较好, 表明 RVM 回归模型的精度较高。由表 1 可

知, RVM 预测各阶频率的 RMSE 均小于 1, 说明其拟合结果的外推能力较好。

表 1 RVM 模型预测各阶频率的 RMSE  
Table 1 The prediction RMSE of frequencies

1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶
0.1498	0.1657	0.0870	0.1494	0.2317

为考虑实际结构中的不确定性, 根据各楼层的刚度分布随机产生 30 次样本(各层刚度值), 并代入数值模型模拟得到 30 次“测量”的结构前 5 阶频率, 各阶频率的均值和标准差如表 2 所示。限于篇幅, 仅给出第一阶频率的 30 次“测试值”如图 4 所示。

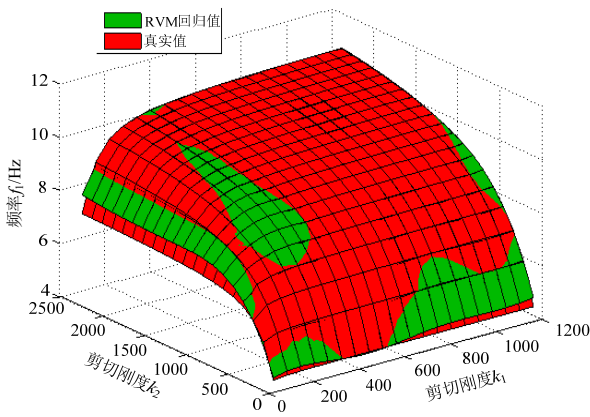


图 3  $k_1$  和  $k_2$  与第 1 阶频率  $f_1$  的回归模型  
Fig.3 Regression model between  $k_1$ ,  $k_2$  and  $f_1$

表 2 前 5 阶频率测试值 /Hz  
Table 2 The five measured frequencies

阶数	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶
均值	7.720	20.366	29.227	40.325	59.298
标准差	0.217	0.503	0.932	1.032	1.655
变异系数	0.028	0.025	0.032	0.026	0.028

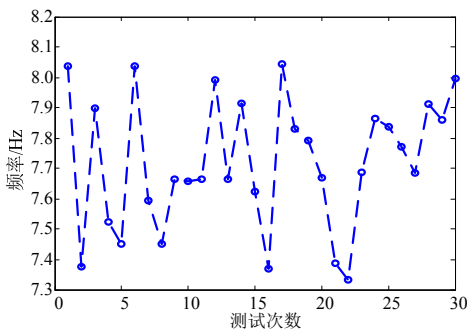
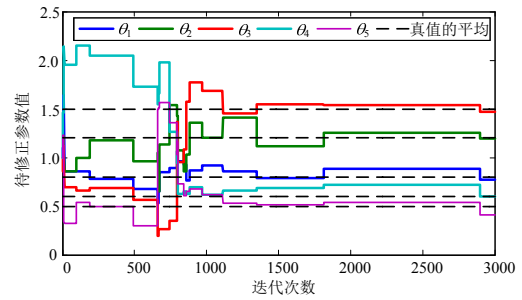


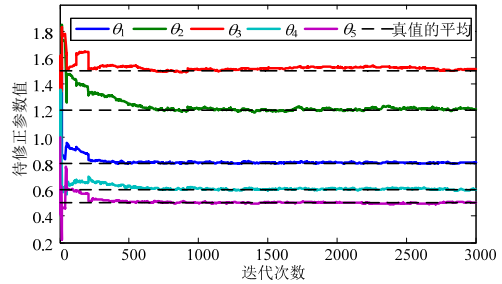
图 4 模拟的 30 次 1 阶频率值  
Fig.4 The simulated first-order frequency

分别采用 MH、DRAM 和 RVM-DRAM 算法进行贝叶斯模型修正, 其中迭代的终止条件为迭代次数达到 3000 步。三种算法得到的 Markov 链如图 5 所示。取 1000 步~3000 步 DRAM 和 RVM-DRAM

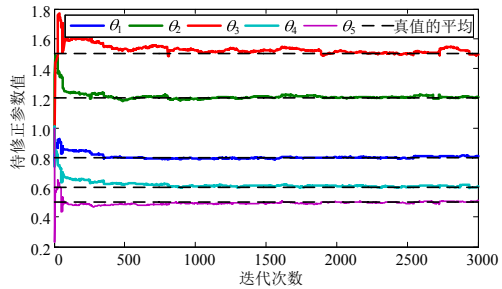
算法抽样样本, 绘制其直方分布图如图 6 所示。



(a) MH 算法



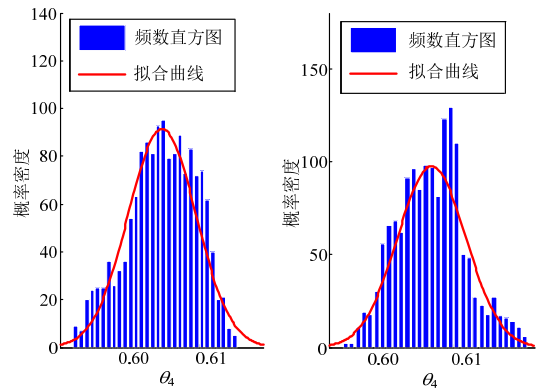
(b) DRAM 算法



(c) RVM-DRAM 算法

图 5 不同算法的马尔科夫链

Fig.5 Markov chains for different algorithms



(a) DRAM 算法

(b) RVM-DRAM 算法

图 6 抽取样本的直方图

Fig.6 Histogram of drawn samples

图 5 表明, 利用 DRAM 算法可以有效克服采样停滞的缺点, 在收敛进入自适应阶段后, 样本没有发生“停滞现象”, 表现出良好的遍历性。图 6 表明后验分布的样本符合正态分布, 为便于比较分

析, 依据大数定理计算后验的均值以比较三种方法的修正效果。计算有限元模型修正前后频率的相对误差如图 7 所示, 待修正参数的变动情况如表 3 所示。

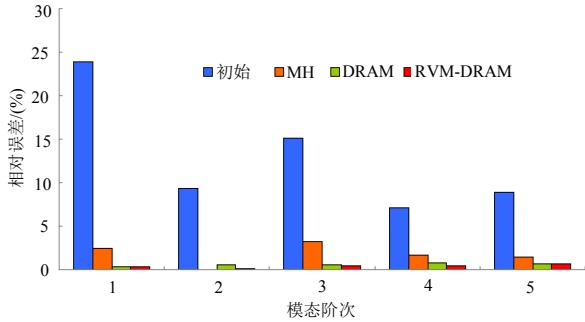


图 7 有限元模型更新前后频率相对误差

Fig.7 The relative error of frequency before and after updating

表 3 3 种不同算法的有限元模型修正结果

Table 3 The updated FEM results for 3 algorithms

参数	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$
“真实”值	0.80	1.20	1.50	0.60	0.50
初始值	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
MH	0.81	1.18	1.41	0.72	0.50
DRAM	0.81	1.22	1.52	0.61	0.50
RVM-DRAM	0.80	1.21	1.52	0.61	0.50

从图 7 和表 3 可知, MH 算法在更新后频率的相对误差依然较大, 这主要是因为 MH 算法的拒绝率较大, 在迭代过程中样本出现“停滞”现象, 即使达到 3000 次迭代终止条件时, 抽样本仍未充分在其空间分布, 故其平均值与真实的平均值相差较大。DRAM 和 RVM-DRAM 算法更新模型后, 待修正参数均返回预设的结构真实值, 但 RVM-DRAM 算法的计算效率相对较高, 大约是 DRAM 算法的 30 倍左右, 因此采用 RVM-DRAM 算法能快速实现贝叶斯有限元模型修正。

#### 4.2 框架试验

在实验室建立四层两跨钢框架结构, 结构中梁、柱均由 350 mm×65 mm×4 mm 的钢板组成, 然后用 L 型节点板和两个螺栓进行连接, 基础采用 12 mm 厚钢板模拟。4 个加速度传感器分别布置在 4 层梁对应的柱节点上, 如图 8(a)中虚线圆圈所示。

采用锤击方式, 在框架顶层施加水平向单点脉冲激励, 为获得多次测试数据, 共进行 20 次激励和测试, 然后利用频率分解法(FDD)识别结构的频率如表 4 所示。限于篇幅, 文中仅给出第 5 次测试数据识别得到的第 2 阶、第 4 阶振型如图 9 所示。

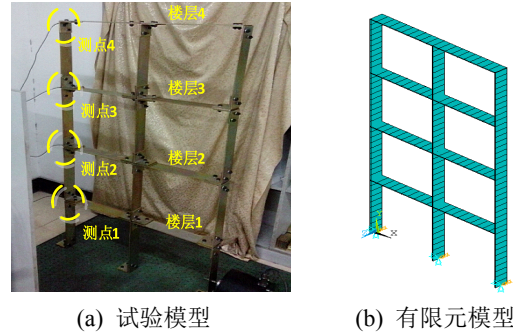


图 8 框架试验和有限元模型

Fig.8 Tested and finite element model of steel frame

表 4 前 4 阶频率测试值 /Hz

Table 4 The four measured frequencies

阶数	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶
均值	4.88	15.63	27.34	35.16
标准差	0.055	0.17	0.27	0.40
变异系数	1.13	1.09	1.00	1.14

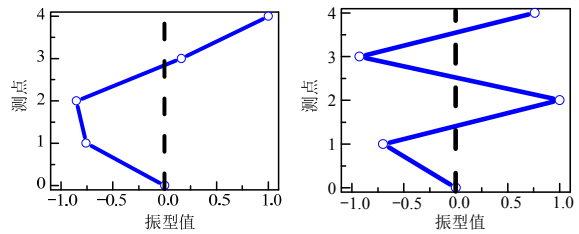


图 9 归一化后的振型

Fig.9 Normalized mode for the steel frame

在 ANSYS 软件中采用 Beam3 单元模拟试验框架结构的梁和柱, 每根梁柱单元(实际结构中一根钢板)等距划分成 10 个单元。梁、柱节点及柱底部与基础节点设置为刚接。初始弹性模量  $E$  和初始质量密度  $\rho$  分别取为 210 GPa 和 7800 kg/m<sup>3</sup>, 泊松比取为 0.3。将同层 3 根柱的弹性模量视为一个待修正参数  $E_{ci}(i=1,2,3,4)$ , 同层 3 根柱的质量密度视为一个待修正参数  $\rho_{ci}$ ; 将同层 2 根梁的弹性模量视为一个待修正参数  $E_{bi}$ , 同层 2 根梁的质量密度视为一个待修正参数  $\rho_{bi}$ , 因而整个有限元模型共 16 个候选参数。采用灵敏度选参法削减待修正参数的个数。灵敏度选参法通过考察各待修正参数变化所引起结构频率变化率的大小实现待修正参数的选取。计算各候选参数对频率的灵敏度如图 10 所示。

从图 10 可知, 频率对梁弹性模量  $E_{b1} \sim E_{b4}$  的敏感度均低于 2, 这主要是因为本次测试的是框架面内水平向频率, 梁的刚度对该向频率的影响较小。另外第一层柱的质量密度  $\rho_{c1}$  的敏感度较低, 这是由于第一层柱和地基相连, 质量对频率的影响不大。



排除以上 5 个对频率敏感度不高的候选参数, 选取图 10 中剩余的 11 个参数为待修正参数。

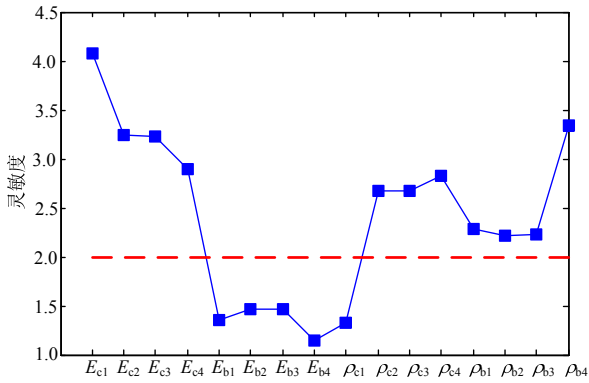


图 10 候选待修正参数的灵敏度分析

Fig.10 The sensitivity analysis for candidate parameters

采用 Latin 抽样技术, 抽取 2000 个训练样本和 400 个验证样本, 用训练样本得到的 RVM 回归模型计算 400 个验证样本的均方根误差 RSME, 结果如表 5 所示。

表 5 各阶频率验证样本的 RMSE

Table 5 The RMSE of frequencies for validation samples

模态阶次	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶
RMSE	0.2444	0.7049	1.2379	2.0326

表 5 中各阶频率的均方根误差均较少, 表明相关向量机得到的回归模型的精度较好。利用该回归模型, 采用 RVM-DRAM 算法进行模型修正, 为对比不确定性修正算法和确定性修正算法的计算效果和效率, 采用 ANSYS 软件自带的一阶优化方法进行模型修正, 得到的修正前后频率误差如图 11 所示。

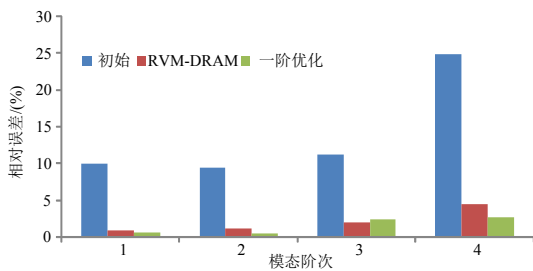


图 11 试验框架修正前后频率误差对比

Fig.11 Comparison of frequency before and after updating

从图 11 可知, 采用 RVM-DRAM 和一阶优化进行模型修正的效果基本相当, 修正后的频率误差均小于 5%。从修正效率来看, 一阶优化完成整个模型修正需要 2 h~3 h, 而 RVM-DRAM 却仅需 2 min~3 min, 修正速度提高了 60 倍左右, 对于大型复杂结构计算效率的提高可能更加明显。在与传

统模型修正方法精度基本相当的情况下, RVM-DRAM 修正算法的计算效率大大提高, 快速实现了有限元模型修正。

## 5 结论

针对 MH 算法在多维参数情况下样本的拒绝率偏高, 易出现“停滞”现象的问题, 将延缓拒绝和自适应策略(DRAM)引入 MH 算法中, 以克服该算法对高维待修正参数收敛较慢或无法收敛的情况; 将 DRAM 算法与相关向量机结合, 提出 RVM-DRAM 算法, 以提高有限元模型修正的计算效率。数值模拟和试验结果表明:

(1) DRAM 算法能够解决 MH 抽样过程中样本停滞的现象, 可使抽样所得样本在真实样本空间较为均匀分布, 克服了传统 MH 算法在多维参数下拒绝率较高的缺点, 从而实现了多维待修正参数下的有限元模型修正。

(2) 相关向量机的预测精度较高, 在训练样本数量较少的情况下, 其预测值的均方根误差仍较小。

(3) RVM-DRAM 算法在保持与传统一阶模型修正方法精度相当的情况下, 将计算效率提高了 60 倍左右, 可快速实现模型修正, 这对大型土木工程结构的有限元模型修正具有重要的现实意义。

## 参考文献:

[1] 方圣恩. 基于有限元模型修正的结构损伤识别方法研究[D]. 湖南: 中南大学, 2010: 2-5.  
Fang Sheng'en. Studies on structural damage detection by finite element model updating [D]. Hunan: Central South University, 2010: 2-5. (in Chinese)

[2] Mosavi, Amir A. Calibrating a high-fidelity finite element model of a highway bridge using a multi-variable sensitivity-based optimization approach [J]. Structure and Infrastructure Engineering, 2014, 10(5): 627-642.

[3] 韩建平, 骆勇鹏, 郑沛娟, 等. 基于响应面的刚构-连续组合梁桥有限元模型修正[J]. 工程力学, 2013, 30(12): 85-90.  
Han Jianping, Luo Yongpeng, Zheng Peijuan, et al. Finite element model updating for a rigid frame-continuous girders bridge based on response surface method [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(12): 85-90. (in Chinese)

[4] 张根辈, 臧朝平, 王晓伟, 等. 螺栓连接框架结构的有限元模型修正[J]. 工程力学, 2014, 31(4): 26-33.  
Zhang Genbei, Zang Chaoping, Wang Xiaowei, et al. Finite element model updating of a framed structure with

- bolted joints [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(4): 26—33. (in Chinese)
- [5] Mottershead, John E, Michael Link, et al. The sensitivity method in finite element model updating: a tutorial [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, 25(7): 2275—2296.
- [6] Soize C. Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics-recent theoretical advances [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(10): 2379—2395.
- [7] Zhang E, Feissel L P, Antoni J. A comprehensive Bayesian approach for model updating and quantification of modeling errors [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, 26(4): 550—560.
- [8] Beck J L, Katafygiotis L S. Updating models and their uncertainties. I: Bayesian statistical framework [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(4): 455—461.
- [9] Katafygiotis L S, Beck J L. Updating models and their uncertainties. II: Model identifiability [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(4): 463—467.
- [10] Arnst M, Clouteau D. A non-parametric probabilistic model for ground-borne vibrations in buildings probabilistic [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 21(1): 18—34.
- [11] Khodaparast H, Mottershead J, Friswell M. Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, 22(8): 1751—1773.
- [12] Beck J L, Au S K. Bayesian updating of structural models and reliability using Markov chain Monte Carlo simulation [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(4): 380—391.
- [13] Cheung, Sai Hung, Beck J L. Bayesian model updating using hybrid Monte Carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(4): 243—255.
- [14] 易伟建, 周云, 李浩. 基于贝叶斯统计推断的框架结构损伤诊断研究[J]. *工程力学*, 2009, 29(5): 121—129.  
Yi Weijian, Zhou Yun, Li Hao. Damage assessment research on frame structure based on Bayesian statistical inference [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 29(5): 121—129. (in Chinese)
- [15] Yuen Ka-Veng. Recent developments of Bayesian model class selection and applications in civil engineering [J]. *Structural Safety*, 2010, 32(5): 338—346.
- [16] 茆诗松, 汤银才. 贝叶斯统计[M]. 北京: 中国统计出版社, 2012: 15—97.  
Mao Shisong, Tang Yincai. Bayesian statistics [M]. Beijing: China Statistics Press, 2012: 15—97. (in Chinese)
- [17] Haario H, Saksman E, Tamminen J. An adaptive Metropolis algorithm [J]. *Bernoulli*, 2001, 7(2): 223—242.
- [18] Tipping M E. The Relevance vector machine [J]. *Neural Networks & Machine Learning*, 1999, 1(3): 652—658.

(上接第 119 页)

- [8] 汪敏, 石少卿, 阳友奎. 柔性棚洞在落石冲击作用下的数值分析[J]. *工程力学*, 2014, 31(5): 151—157.  
Wang Min, Shi Shaoqing, Yang Youkui. Numerical simulation on flexible rock-shed under the impact of rockfall [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(5): 151—157. (in Chinese)
- [9] 汪敏. 柔性防护技术和柔性棚洞的设计及工程应用研究[D]. 重庆: 后勤工程学院, 2011.  
Wang Min. The engineering application and the design research of the flexible protective technique and the flexible rock shed [D]. Chongqing: Logistical Engineering University, 2011. (in Chinese)
- [10] 崔廉明. 被动防护系统中消能件的力学性能研究[D]. 重庆: 后勤工程学院, 2014.  
Cui Lianming. Study on the mechanical properties of the energy dissipator used in the passive protection system [D]. Chongqing: Logistical Engineering University, 2014. (in Chinese)
- [11] del Coz Díaz J J, García Nieto P J, Castro Fresno D, Blanco Fernández E. Non-linear analysis of cable networks by FEM and experimental validation [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2009, 86(2): 301—313.
- [12] Guoxiong Lu, Tongxi Yu. Energy absorption of structures and materials [M]. Cambridge England: Woodhead Publishing Limited, 2006: 42—47.
- [13] 司炳君, 孙治国, 艾庆华, 王东升. 钢筋混凝土桥墩滞回性能的有限元参数敏感性分析及模型改进[J]. *工程力学*, 2009, 26(1): 174—180, 186.  
Si Bingjun, Sun Zhiguo, Ai Qinghua, Wang Dongsheng. Sensitive analysis and model modification for finite element analysis of R/C bridge piers under cyclic loading [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(1): 174—180, 186. (in Chinese)