

# 基于 DFT 系数极值的单频信号频率的高精度迭代估计方法\*

肖志斌,唐小妹,王飞雪

(国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

**摘要:**提出了一种基于 DFT 系数极值的单频信号频率的高精度迭代估计方法,该方法根据 DFT 谱线使用截弦法解算 DFT 系数极值所在谱线的位置,进而估计单频信号频率。在估计过程中,直接对 DFT 幅度最大的谱线进行小数频移以获得新的谱线,从而减少频率采样间隔提高估计精度;同时通过迭代估计消除频率依赖性,提高估计性能。仿真结果表明该方法的频率估计精度在任意频率处均接近于克拉美罗下限,其运算量为  $N \log_2 N + 4N$  次复乘法运算,仅比传统的基于 DFT 插值的估计算法增加  $4N$  次复乘法运算,其中  $N$  为 DFT 运算时所采用的数据点数。

**关键词:**DFT 插值;截弦法;迭代估计;克拉美罗下限

**中图分类号:**TN958 **文献标志码:**A **文章编号:**1001 - 2486(2013)02 - 0099 - 05

## High accuracy iterative frequency estimating algorithm based on the extremum of the DFT coefficients

XIAO ZhiBin, TANG XiaoMei, WANG FeiXue

(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** At present, frequency estimation algorithm based on DFT interpolation is widely used because of its high operation efficiency, but the estimating accuracy is dependent on the signal frequency, and for specific frequency, the estimation performance is bad. To solve this problem, a high accuracy frequency estimation algorithm with lower calculating complexity is proposed. In this algorithm, the signal frequency was estimated by Secant Method based on the DFT samples, and decimal fraction frequency of peak magnitude DFT sample was estimated to generate new DFT samples, thus reducing the DFT sample interval with little calculating burden, then improving the estimating accuracy. In addition, through removing the frequency reliant characteristics of estimation which exist in traditional frequency estimator based on the DFT interpolation, this algorithm increased the iterative estimation. To analyze the performance of the algorithm, a simulation was fulfilled. The simulation results show that the single frequency estimator without iterative estimation has asymptotic estimating variance less than 1.2 times the CRLB, which is better than the traditional frequency estimator based on the DFT interpolation, with calculation labor of  $N \log_2 N + 2N$  complex multiplications, and the iterative frequency estimator has estimating variance about CRLB for all signal frequency calculation labor of  $N \log_2 N + 2N$  complex multiplications, and  $N$  is the number of the DFT samples.

**Key words:** DFT interpolation; Secant-Method; iterative estimation; CRLB

单频信号频率估计是通信、雷达、导航、声呐以及电子对抗等领域信号处理中的一个重要问题,单频信号频率的估计方法有很多,人们通过各种近似和对条件的约束,衍生出不同类别的频率估计算法,主要有基于信号相位<sup>[1-2,9]</sup>、基于信号自相关函数<sup>[3]</sup>以及基于信号 Discrete Fourier Transform(DFT)插值的估计方法<sup>[4-8]</sup>,其中基于 DFT 插值的估计方法可以利用 Fast Fourier Transform (FFT)实现快速处理,在单频信号估计领域得到了广泛的应用。单频复信号模型及 DFT 表达式分别如下述两式所示:

$$x(n) = Ae^{j(\frac{2\pi n f}{f_d} + \theta)} + w(n), n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (1)$$

$$X(k) = Ae^{j\theta} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n (\frac{f}{f_d} - \frac{k}{N})} + W(k) \quad (2)$$

其中  $A$  为信号幅度,  $f$  为信号真实频率,  $f_s$  为采样频率,  $N$  为信号长度,  $w(n) = w_c(n) + jw_s(n)$  为复高斯白噪声,  $w_c(n)$  和  $w_s(n)$  是方差为  $\sigma^2/2$  的不相关高斯白噪声, 信号信噪比定义为  $SNR = A^2/\sigma^2$ 。

基于 DFT 插值的估计方法的频率估计器的一般表达式可以写为式(3):

\* 收稿日期:2012 - 06 - 07

基金项目:中国卫星导航年会青年优秀论文资助课题(CSNC2011-QY-06)

作者简介:肖志斌(1986—),男,湖南衡阳人,博士研究生,E-mail: xiaozb1986@163.com;

王飞雪(通信作者),男,教授,博士,博士生导师,E-mail: wangfeixue365@sina.com

$$f = \frac{(k_p + \delta)f_s}{N} \quad (3)$$

其中  $k_p$  为信号 DFT 幅度最大值的下标,  $-0.5 \leq \delta \leq 0.5$  为真实频率距离 DFT 谱线的最小间隔,不同的 DFT 插值估计方法, $\delta$  的估计表达式各不相同,目前已有大量基于 DFT 插值的估计方法被提出。

Rife 在文献[7]中利用 DFT 幅度最大值和 DFT 幅度的次大值估计信号频率,其估计器表达式如下:

$$\delta = \begin{cases} \frac{|X(k_p + 1)|}{|X(k_p + 1)| + |X(k_p)|}, & |X(k_p + 1)| > |X(k_p - 1)| \\ -\frac{|X(k_p - 1)|}{|X(k_p - 1)| + |X(k_p)|}, & |X(k_p + 1)| \leq |X(k_p - 1)| \end{cases} \quad (4)$$

Quinn 在文献[5]中利用 DFT 幅度最大值所在谱线以及邻近谱线估计信号频率,其估计器表达式为:

$$\delta = \begin{cases} \delta_2, & \delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \\ \delta_1, & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$\delta_1 = \frac{\operatorname{Re}[X(k_p - 1)/X(k_p)]}{1 - \operatorname{Re}[X(k_p - 1)/X(k_p)]} \quad (6)$$

$$\delta_2 = \frac{-\operatorname{Re}[X(k_p + 1)/X(k_p)]}{1 - \operatorname{Re}[X(k_p + 1)/X(k_p)]} \quad (7)$$

为提高频率估计精度,Quinn 在文献[6]中改进了上述估计方法,其频率估计器  $\delta$  为  $\delta_1$  和  $\delta_2$  的非线性组合:

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \kappa(\delta_1^2) + \kappa(\delta_2^2) \quad (8)$$

其中:

$$\kappa(x) = \frac{1}{4} \log(2x^2 + 6x + 1) - \frac{\sqrt{6}}{24} \log \left( \frac{x + 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}{x + 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right) \quad (9)$$

上面所描述的三种单频信号频率的估计方法均具有频率依赖性,当  $\delta = \pm 0.5$  时,这三种方法的频率估计精度均接近克拉美罗下限;而当信号真实频率接近 DFT 谱线时,即  $\delta = 0$  时,这三种估计方法的频率估计性能将会恶化,此时 Rife 方法以及 Quinn 方法的频率估计方差达到了克拉美罗下限的 3.29 倍,Quinn 改进方法的频率估计方差约为克拉美罗下限的 1.64 倍,Quinn 改进方法是目前基于 DFT 插值的估计方法中估计精度最高

的方法。

本文提出一种基于 DFT 系数极值的单频信号频率的高精度迭代估计方法。

## 1 基于 DFT 系数极值的迭代估计方法

基于 DFT 系数的迭代估计方法的基本原理是利用频率采样间隔为 0.5 的 DFT 幅度最大值与次大值所在谱线估计 DFT 系数极值所在位置,即为频率估计值。根据后续的仿真分析可知,当 DFT 谱线离真实频率值的最小距离为 0.25 时,频率估计精度最高,接近克拉美罗下限。在第一次估计的基础上可以根据频率估计值对原始采样序列进行频移,使得其 DFT 幅度最大的两根谱线与频率估计值的距离相等均为 0.25,此时根据这两根谱线采用第一次的估计方法频率估计可以获得高精度的频率估计值。该方法的具体实现步骤如下所示:

1) 首先对式(1)所示的长度为  $N$  的待测单频信号做 DFT 运算,找到 DFT 幅度最大的谱线  $X(k_p)$ ;

2) 计算峰值谱线左右 0.5 个频率采样间隔的两根谱线的 DFT 系数  $X(k_p \pm 0.5)$ ,其计算公式如式(10)所示;

$$X(k_p \pm 0.5) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n(k_p \pm 0.5)} \quad (10)$$

3) 利用  $|X(k_p \pm 0.5)|$  中较大的值与  $|X(k_p)|$  建立频率估计方程,不失一般性,假设  $|X(k_p + 0.5)|$  幅度较大。最后利用截弦法解算该方程可以得到高精度的频率估计值, $|X(k_p)|$  与  $|X(k_p \pm 0.5)|$  的关系如图 1 所示;

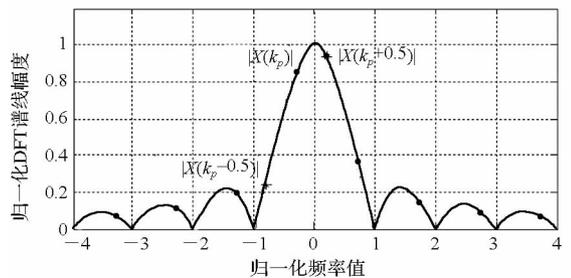


图 1 DFT 系数插值示意图

Fig. 1 The sketch map of DFT interpolation

4) 根据频率估计值对谱线  $X(k_p)$  与  $X(k_p + 0.5)$  进行频移,使得两者与频率估计值的距离相等均为 0.25,假设频移量为  $l$ ,则频移后的谱线如式(11)、(12)所示;

5) 与步骤 3) 一样,根据频移后的两根谱线建立频率估计方程,并采用截弦法解算该方程并扣除频移量即可得到高精度的频率估计值;

$$X(k_p)' = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n(k_p+l)} \quad (11)$$

$$X(k_p + 0.5)' = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n(k_p+0.5+l)} \quad (12)$$

### 1.1 频率估计方程的建立

记  $P = \max\{|X(k_p + 0.5)|, |X(k_p - 0.5)|\}$ ,

令:

$$P_1 = \max\{|X(k_p)|, P\} \quad (13)$$

$$P_2 = \min\{|X(k_p)|, P\} \quad (14)$$

$P_1$  和  $P_2$  实际上还可以采用如下方式等效地获得:将长度为  $N$  的单频信号  $x(n)$  补零扩展为长度为  $2N$  的信号  $y(n)$ ,然后对该信号做 DFT 运算得到  $Y(k)$ ,其 DFT 幅度最大值  $Y(k_p)$ 、幅度次大值  $Y(k_p \pm 1)$  即为  $P_1$  与  $P_2$ 。

补零后的单频信号  $y(n)$  可表示如下:

$$y(n) = \begin{cases} Ae^{j(\frac{2\pi n f}{f_s} + \theta)} + w(n), & n = 0, \dots, N-1 \\ 0, & n = N, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (15)$$

若不考虑噪声,对信号  $y(n)$  做 DFT 变换后得到  $Y(k)$  可表示如下:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{\pi n k}{N}}, k = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (16)$$

化简后,  $|Y(k)|$  可以写为式(17):

$$|Y(k)| = AN \left| \frac{\text{sinc}[\pi \Delta f(k)/2]}{\text{sinc}[\pi \Delta f(k)/(2N)]} \right|, \quad k = 0, \dots, 2N-1 \quad (17)$$

其中:  $\Delta f(k) = 2N[f/f_s - k/(2N)]$ ,  $|\Delta f(k)|$  可定义为信号真实频率与 DFT 谱线之间的间隔,  $|Y(k)|$  的最大值为  $P_1 = |Y(k_p)|$ , 次大值为  $P_2 = |Y(k_p \pm 1)|$ , 不失一般性,可令  $P_2 = |Y(k_p + 1)|$ , 此时信号真实频率与 DFT 幅度最大值、次大值所在谱线的间隔分别为  $|\Delta f(k_p)|$ 、 $|\Delta f(k_p + 1)|$ , 令

$$\delta = \Delta f(k_p) \quad (18)$$

则

$$\Delta f(k_p + 1) = \delta - 1 \quad (19)$$

$$0 \leq \delta \leq 0.5 \quad (20)$$

相应信号真实频率可表示为  $\delta$  的函数:

$$f = \frac{k_p + \delta}{2N} f_s \quad (21)$$

根据式(18)、(19)将  $|Y(k)|$  的最大值和次大值  $P_1$  与  $P_2$  代入式(17)可得到频率估计方程如下:

$$\begin{cases} AN \left| \frac{\text{sinc}[\pi\delta/2]}{\text{sinc}[\pi\delta/(2N)]} \right| = P_1 \\ AN \left| \frac{\text{sinc}[\pi(\delta-1)/2]}{\text{sinc}[\pi(\delta-1)/(2N)]} \right| = P_2 \end{cases} \quad (22)$$

当  $N$  足够大时,  $\text{sinc}[\pi\delta/(2N)]$  与  $\text{sinc}[\pi(\delta-1)/(2N)]$  近似为 1, 由于  $0 \leq \delta \leq 0.5$ , 则  $\text{sinc}[\pi\delta/2]$  与  $\text{sinc}[\pi(\delta-1)/2]$  均大于 0, 此时上述方程可简化如下:

$$\begin{cases} AN \text{sinc}[\pi\delta/2] = P_1 \\ AN \text{sinc}[\pi(\delta-1)/2] = P_2 \end{cases} \quad (23)$$

其中  $0 \leq \delta \leq 0.5$ , 上述方程仅包含两个未知数  $A, \delta$ , 理论上可以精确计算出频率间隔  $\delta$ , 解算出  $\delta$  后代入式(21)即可得到信号真实频率。

### 1.2 利用截弦法直接估计信号频率

频率估计方程建立后,可以利用截弦法解算该频率估计方程。式(22)中只有两个未知数  $A, \delta$ , 理论上可以精确计算出频率间隔  $\delta$ , 但由于方程的非线性,很难得到方程的解析解,这里采用截弦法求解方程。

式(22)可转化为下述一元方程:

$$y(\delta) = P_1 \text{sinc}\left[\frac{\pi(\delta-1)}{2}\right] - P_2 \text{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{2}\right) = 0 \quad (24)$$

令  $g(\delta) = \text{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{2}\right)$ , 则:可以证明当  $0 \leq \delta \leq$

0.5 时,有下述关系:

$$y'(\delta_0) = P_1 \left. \frac{dg(\delta)}{d\delta} \right|_{\delta=\delta_0-1} - P_2 \left. \frac{dg(\delta)}{d\delta} \right|_{\delta=\delta_0} \quad (25)$$

根据  $\text{sinc}$  函数特性可知,当  $0 \leq \delta \leq 0.5$  时,  $g(\delta)$  递减,当  $0.5 \leq \delta \leq 1$  时,  $g(\delta)$  递增,故当  $0 \leq \delta \leq 0.5$  时,有下式:

$$y'(\delta) \geq 0 \quad (26)$$

$y(0), y(0.5)$  的表达式如下:

$$y(0.5) = (P_1 - P_2) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (27)$$

$$y(0) = P_1 \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2}\right) - P_2 \quad (28)$$

$P_1$  与  $P_2$  分别为  $|Y(k)|$  的最大值与次大值, 当  $0 \leq \delta \leq 0.5$  时,根据式(23)有:

$$P_2 \leq P_1 \leq AN \quad (29)$$

$$P_2 \geq AN \text{sinc}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (30)$$

根据式(26) ~ (29) 有:

$$y(0) \leq 0 \quad (31)$$

$$y(0.5) \geq 0 \quad (32)$$

由式(26)、(31)和(32)可知  $y(\delta)$  在  $0 \leq \delta \leq 0.5$  有且只有一个解,为保证  $y(\delta)$  在整个实数区间只有一个位于区间  $0 \leq \delta \leq 0.5$  的解,可以将

$y(\delta)$  扩展为下式:

$$y(\delta) = \begin{cases} k(\delta - 0.5) + y(0.5), & \delta \geq 0.5 \\ P_1 \text{sinc}\left(p \frac{\delta - 1}{2}\right) - P_2 \text{sinc}\left(\frac{p\delta}{2}\right), & 0 \leq \delta < 0.5 \\ y(0) - k\delta, & \delta < 0 \end{cases} \quad (33)$$

其中  $k = 2[y(0.5) - y(0)]$ 。采用截弦法选取初值  $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0.5$  可以迅速收敛至式(23) 的准确解  $\delta$ 。

当存在噪声且幅度足够大时,  $y(0)$  可能大于 0, 此时方程  $y(\delta) = 0$  将不存在位于区间  $0 \leq \delta \leq 0.5$  的解, 此时取  $\delta = 0$ , 主要基于如下两点原因:

1) 真实频率必然位于 DFT 幅度最大值  $P_1$  所处谱线和 DFT 幅度次大值  $P_2$  所处谱线之间, 即  $0 \leq \delta \leq 0.5$ ;

2)  $y(0)$  大于 0 时,  $\delta$  等于 0 的概率最大: 因为  $\delta$  越小,  $P_1$  越大,  $P_2$  越小, 相应  $y(0) = P_1 \text{sinc}(\pi/2) - P_2$  越大,  $y(0) > 0$  的概率就越大。

## 2 性能分析

式(23) 的解是不可解析的, 目前还无法得到基于 DFT 系数极值的迭代估计方法的频率估计精度的理论结果。本节主要通过仿真评估该方法的性能, 并从频率估计精度与实现复杂度两个角度与其他几种典型的 DFT 插值方法作对比。

### 2.1 频率估计精度

首先给出前文所描述的几种典型基于 DFT 插值的估计方法的频率估计精度公式以及复正弦信号频率估计精度的克拉美罗下限<sup>[5-7]</sup>, 如表 1 所示, 其中 Quinn1 代表 Quinn 方法, Quinn2 代表 Quinn 改进方法, 频率估计精度主要与信噪比  $SNR = A^2/\sigma_z^2$ 、数据长度  $N$  以及信号真实频率和 DFT 谱线的最小间隔  $\delta$  有关。

基于 DFT 系数极值的迭代估计方法主要包含两次估计, 第二次估计是在第一次估计值的基础上迭代进行的, 第一次估计记为 DFT-Secent, 第二次估计记为 DFT-Secent (twice)。下面通过仿真将两次估计的频率估计精度与克拉美罗下限以及 Quinn 方法以及 Quinn 改进方法作对比。采用蒙特卡洛仿真, 仿真次数为 40, 采样率  $f_s = 50\text{MHz}$ , 仿真结果如图 2 ~ 4 所示, 为便于对比, 图(3) 与图(4) 中的纵坐标  $\sigma_f^2$  用 dB 表示。

表 1 几种典型基于 DFT 插值的估计方法的频率估计精度

Tab.1 The frequency accuracy of several typical frequency estimating algorithm based on DFT interpolation

估计方法	估计方差 $\sigma_f^2(\delta)$	$\frac{\max\{\sigma_f^2(\delta)\}}{\text{CRLB}}$
Rife	$\frac{(1 -  \delta )^2 (2\delta^2 - 2 \delta  + 1) f_s^2}{2N^3 \left(\frac{A^2}{\sigma_z^2}\right) \text{sinc}^2(\pi\delta)}$	3.29
Quinn1	$\frac{(1 -  \delta )^2 (2\delta^2 - 2 \delta  + 1) f_s^2}{2N^3 \left(\frac{A^2}{\sigma_z^2}\right) \text{sinc}^2(\pi\delta)}$	3.29
Quinn2	$\frac{(\delta^2 - 1)^2 (3\delta^4 + 1) f_s^2}{4N^3 \left(\frac{A^2}{\sigma_z^2}\right) (3\delta^4 + 6\delta^2 + 1) \text{sinc}^2(\pi\delta)}$	1.64
CRLB	$\frac{3f_s^2}{2\pi^2 \left(\frac{A^2}{\sigma_z^2}\right) N^3}$	1

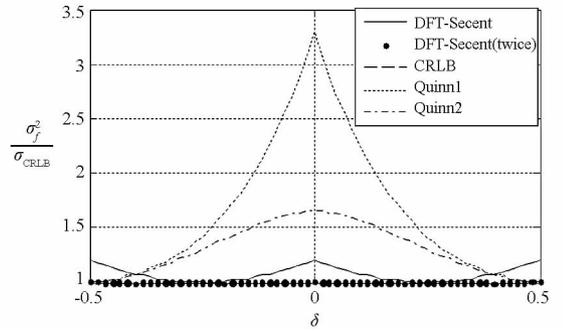


图 2 频率估计精度以及与  $\delta$  的关系 ( $SNR = 0\text{dB}, N = 256$ )

Fig.2 The frequency estimating accuracy under different ( $SNR = 0\text{dB}, N = 256$ )

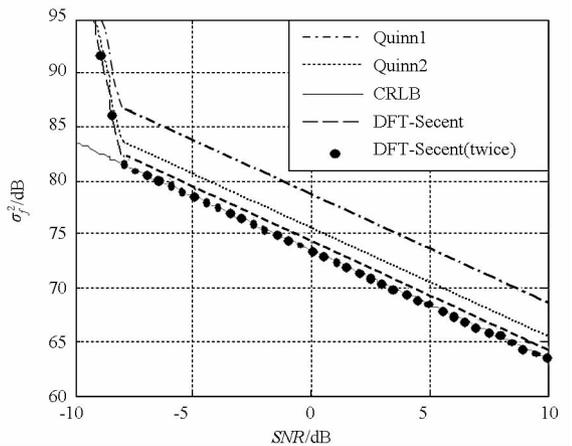


图 3 频率估计精度与 SNR 的关系 ( $N = 256, \delta = 0$ )  
Fig.3 The frequency estimating accuracy under different SNR ( $N = 256, \delta = 0$ )

从上述各图可以看出, 本文提出方法的频率估计精度接近于克拉美罗下限, 性能要优于

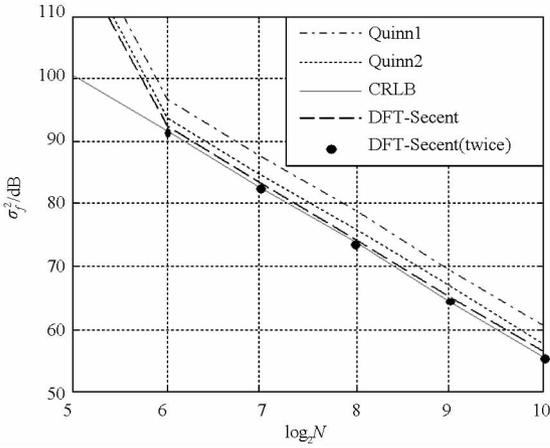


图4 频率估计精度与  $N$  的关系 ( $SNR = 0\text{dB}, \delta = 0$ )

Fig.4 The frequency estimating accuracy under different  $N$  ( $SNR = 0\text{dB}, \delta = 0$ )

Quinn1 及 Quinn2 方法,具体如下所示:

1) 第一次估计的频率估计性能

① 估计方差最大约为克拉美罗下限的 1.2 倍,要小于 Rife 方法、Quinn 方法及其改进方法,具体见表 1;

② 当  $\delta = \pm 0.25$  时,估计方差最小,与克拉美罗下限基本相等;

③ 当  $\delta = 0, \pm 0.5$  时,估计方差最大,约为克拉美罗下限的 1.2 倍;

④ 频率估计精度随数据长度  $N$  以及信噪比的变化趋势与克拉美罗下界限以及其他几类典型的 DFT 插值方法一致。

2) 第二次估计的频率估计性能

① 对于任意频率,估计方差均接近于与克拉美罗下限;

② 频率估计精度随数据长度  $N$  以及信噪比的变化趋势与克拉美罗下界限以及其他几类典型的 DFT 插值方法一致。

## 2.2 实现复杂度

本文提出的基于 DFT 系数极值的迭代估计方法的运算量主要集中在 FFT 计算以及 DFT 系数计算过程中,采用截弦法进行迭代估计的过程中基本上不会增加运算量。对于第一次估计,除 FFT 运算之外,只需要计算 DFT 峰值谱线左右 0.5 个频率采样间隔的 DFT 系数值,因此相对于传统的 DFT 插值算法需要增加  $2N$  次复乘法运算,对于第二次估计,还需要对  $X(k_p \pm 0.5)$  中幅度较大的谱线以及  $X(k_p)$  这两条谱线进行频移。

因此相对于传统算法,基于 DFT 系数极值的迭代估计算法需要增加  $4N$  次复乘法运算。具体的算法实现复杂度如表 2 所示。

表 2 基于 DFT 系数极值的迭代估计方法的实现复杂度  
Tab.2 The computation burden of the frequency estimating algorithm based on the extremum of the DFT coefficients

估计方法类型	复乘法次数
传统方法 (Rife、Quinn 方法等)	$N \log_2 N$
基于 DFT 系数极值的迭代估计方法	$N \log_2 N + 4N$

## 3 结论

本文提出了一种基于 DFT 系数极值的单频信号频率的高精度迭代估计方法,其频率估计精度在任意频率处均接近于克拉美罗下限,其运算量为  $N \log_2 N + 4N$  次复乘法运算,其中  $N$  为 DFT 运算时所采用的数据点数,仅比传统的基于 DFT 插值的估计算法增加  $4N$  次复乘法运算。

## 参考文献 (References)

- [1] Tretter S A. Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression [J]. IEEE Transaction Information Theory, 1985, 31(6):832 - 835.
- [2] Kay S. A fast and accurate single frequency estimation [J]. IEEE Transaction Acoustics Speech Signal Process, 1989, 37(12):1987 - 1990.
- [3] Fitz M P. Further results in the fast estimation of a single frequency [J]. IEEE Transaction on Communication, 1994, 42(2):862 - 864.
- [4] Aboutanos E, Mulgrew B. Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2005, 53(4):1237 - 1242.
- [5] Quinn B G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1994, 42(5):1264 - 1268.
- [6] Quinn B G. Estimation of frequency, amplitude, and phase from the DFT of a time series [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1997, 45(3):814 - 817.
- [7] Rife D, Boorstyn R. Single tone parameter estimation from discrete-time observation [J]. IEEE Transaction Information Theory, 1974, 20(5):591 - 598.
- [8] Jacobsen E, Kootsookos P. Fast, accurate frequency estimators [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(3):123 - 125.
- [9] 齐国清,贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法 [J]. 电子学报, 2001, 29(9):1164 - 1167. QI Guoqing, Jia Xinle. High-accuracy frequency and phase estimation of single-tone based on phase of DFT [J]. Acat Electronica Sinica, 2001, 29(9):1164 - 1167. (in Chinese)