

多捐赠者肾脏调换问题*

王刚, 骆志刚

(国防科技大学 计算机学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:用于器官移植的肾脏处于严重的短缺状态。为缓解这一问题,越来越多的国家开始实施各种形式的肾脏调换计划。肾脏调换问题一般被建模为一个合作博弈(Kidney Exchange game, KE)。其中的局中人为病人及与其配型失败的捐赠者所构成的二元组。现实中不乏拥有多个配型捐赠者失败的病人。定义了多捐赠者肾脏调换博弈(Multi-Donor Kidney Exchange game, MDKE),分析了其可行解及稳定解的结构,证明了捐赠多颗肾脏无益于参与稳定调换,将TTC算法、KE稳定解的NP难解性以及最大覆盖稳定解的不可近似性拓展到MDKE。实验表明引入MDKE效果显著。

关键词:肾脏调换;合作博弈;核心;稳定解;圈包装

中图分类号:TP301.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-2486(2013)06-0132-06

The multi-donor kidney exchange problem

WANG Gang, LUO Zhigang

(College of Computer, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The kidney for transplantation is in serious shortage. To alleviate this problem, more and more countries have started various kidney exchange programs. The kidney exchange problem (KE) is generally modeled as a cooperative game. Each player represents an incompatible patient-donor pair. A patient may have more than one incompatible donor in reality. In light of this, the multi-donor kidney exchange game (MDKE) was defined. The structures of MDKE's feasible solutions and stable solutions were studied. It was proved that donating multiple kidneys is useless in joining in a better stable solution. Furthermore, the TTC algorithm, the NP-hardness of a stable solution and the inapproximability of a maximum cover stable solution of KE were extended to MDKE. Experiments show the effectiveness of MDKE.

Key words: kidney exchange; cooperative game; core; stable solution; cycle packing

肾脏移植是治疗肾衰竭尤其是晚期肾衰竭的最佳措施。然而用于移植的肾脏却处于严重的短缺状态。以美国^[1]为例,截至2012年10月,全美共有94300位病人在排队等候肾脏移植。用于移植的肾脏有两个来源:其一为生前签署过捐赠协议的人过世之后所捐赠的尸体肾,其二为活人所捐赠的活体肾。2011年美国实施了11000例尸体肾移植手术及5800例活体肾移植手术,而同期仍有4700人在等候肾脏的过程中死亡。在中国,由于社会经济水准以及传统儒家文化的影响,签署器官捐赠协议的人远较欧美国国家稀少,待移植肾脏短缺的状况也更加严重。有新闻报道:2011年全国共实施肾移植手术约5000例,而当前需要肾移植手术的病人总数高达100万!

活体肾的捐赠几乎全部都有特定的捐赠对象。但由于免疫排斥反应的存在,此类手术常常无法顺利实施。为缓解这一问题,医学界提出了活体肾脏调换:与其捐赠对象配型失败的捐赠者们互相调换

捐赠对象。文献[2-3]引入了合作博弈模型(Kidney Exchange game, KE)来表示活体肾脏调换。该模型已成为活体肾脏调换问题的标准模型。一个可行的调换表现在图上就是一组顶点不交的有向圈。文献[4]给出了判断一个给定调换是否稳定的多项式时间算法。而稳定调换存在与否则被证明是一个NP难解问题^[5]。令人更加沮丧的是:若 $P \neq NP$,则寻找能够给最多的病人调换到匹配肾脏的稳定调换这一问题不存在近似比为 $n^{1-\varepsilon}$ ($\forall \varepsilon > 0$)的近似算法^[6]。如果对任意病人而言都没有匹配程度一致的肾脏,情形似乎有所简化。此时稳定调换必然存在^[7],并且经典的TTC (Top Trading Cycles)算法^[8]可在 $O(m)$ (m 为博弈图所含边数)时间内^[9]找到一个稳定调换。

在一个可行的调换中,位于同一个调换圈上的所有手术必须同时进行。否则,一旦某个捐赠者在自己的捐赠对象已经得到他人的肾脏之后食言而拒绝继续手术,将造成灾难性的后果:至少一个病

* 收稿日期:2013-03-07

作者简介:王刚(1978—),男,河北卢龙人,博士研究生,E-mail:wanggang0723@gmail.com;

骆志刚(通信作者),男,研究员,博士,博士生导师,E-mail:zhigang_luo@sina.com

人在没有得到肾脏的情况下失去了捐赠者!更有甚者,食言的捐赠者还不会受到任何惩罚。其原因在于人体器官交易在世界各国都是非法行为。用于移植的活体器官都必须是赠送的礼物而非商品。拒绝赠送承诺过的礼物虽不道德却不违法!

一个调换圈的长度越大,所涉及的医护人员、医疗设备以及其它各种资源就越多,潜在的风险也越高。所以在各国现已付诸实施的调换计划中,以两两对换最为常见,间或允许圈长为3的调换。学术界针对限制圈长的肾脏调换问题也开展了研究,证明了如3路稳定2路调换(3-way stable 2-way exchange,意指阻塞圈长 ≤ 3 、调换圈长 ≤ 2)^[10]、3路调换^[11-12]、有向三部图上的3路稳定3路调换^[13]等一批问题的NP完全性。文献[11]还证明了强稳定3路调换具有#P完全计数复杂性。

在KE模型中,每个局中人代表一个“病人—捐赠者”对,因此也就默认一个病人仅有一个捐赠者。但是现实生活中一个病人有多位配型失败捐赠者的情形并非罕见。此类病人应该有更多的机会得到匹配的肾脏。但其优势在KE中未能得到体现。此外,允许多位捐赠者同时捐赠肾脏是否可能为本来无法得到肾脏的病人带来参与调换的机会?是否可能为病人带来得到匹配程度更好的肾脏的机会?为了回答这些问题,本文将KE模型推广到允许多捐赠者的情形。

1 多捐赠者肾脏调换博弈模型

定义1 多捐赠者肾脏调换博弈(Multi-Donor Kidney Exchange game, MDKE)是一个三元组 $\Gamma = (\beta, D, O)$,其中 $\beta = \{ \langle p_i, d_{i1}, d_{i2}, \dots \rangle : i \in [n] \}$ 是由病人及其捐赠者组成的多元组的集合, D 是以 β 中病人和捐赠者为顶点的有向图,其有向边集 $A(D)$ 之中包含两类有向边: $\{ (p_i, d_{ij}) : i \in [n] \}$ 和 $\{ (d_{ij}, p_k) : d_{ij} \text{ 捐赠的肾脏与 } p_k \text{ 匹配} \}$,而 $O = \{ \leq_i : i \in [n] \}$ 为 p_i 内邻域 $N_D^-(p_i)$ 上的全序的集合。

(1) Γ 的可行解是指 D 的满足下述条件的生成子图:

- ① $\forall p_i, d^-(p_i) = 0 \Rightarrow d^+(p_i) = 0,$
- ② $\forall d_{ij}, d^+(d_{ij}) = d^-(d_{ij});$

(2) 可行解的覆盖数是指其中入度为1的病人数量;

(3) 称 $(N_D^-(p_i), \leq_i)$ 中存在纠结(tie)是指 $\exists j, k \in N_D^-(p_i)$ 满足 $j \leq_i k$ 且 $k \leq_i j$,记为 $j \sim_i k$ 。

图1是博弈图 D 的一例局部示意。

在一个可行的MDKE调换中,没有得到匹配肾脏的病人当然不可能允许其捐赠者将肾脏捐与

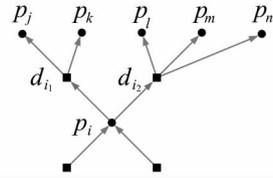


图1 MDKE模型(圆点表示病人,方块表示捐赠者)
Fig. 1 The MDKE model (a dot represents a patient, a square represents a donor)

他人,所以有 $d^-(p_i) = 0 \Rightarrow d^+(p_i) = 0$ 。可以看出,得到肾脏的病人可能允许零至多个捐赠者捐赠肾脏。而 $d^+(d_{ij}) = d^-(d_{ij})$ 是说捐赠者只有在获得其病人的许可之后才捐赠其肾脏。见表1。

表1 MDKE可行解中的捐赠者
Tab. 1 Donors in a feasible MDKE solution

d_{ij} 的入度	d_{ij} 的出度	意义
0	0	d_{ij} 未得 p_i 许可, d_{ij} 不捐赠肾脏。合理
0	1	d_{ij} 未得 p_i 许可, d_{ij} 捐赠肾脏。非法
1	0	d_{ij} 得到 p_i 许可, d_{ij} 不捐赠肾脏。无效
1	1	d_{ij} 得到 p_i 许可, d_{ij} 捐赠肾脏。合理

博弈图 D 中病人 p_i 的内邻域 $N_D^-(p_i)$ 为所有与其配型成功的(其他病人的)捐赠者的集合。依据匹配程度的高低, p_i 构造全序 \leq_i 。而全序中的纠结表明存在匹配程度一致的肾脏。

定义2 设MDKE的两个可行解 S_1, S_2 中包含病人 p_i 的连通分支 B_1, B_2 为非空图,则病人 p_i 偏好 B_1 甚于 B_2 ,从而 S_1 甚于 S_2 ,记为 $S_1 <_i S_2$,是指下列三个情形之一成立:

- (1) $d_{B_1}^+(p_i) < d_{B_2}^+(p_i);$
- (2) $d_{B_1}^+(p_i) = d_{B_2}^+(p_i)$ 且 $d_{B_1} <_i d_{B_2}$,其中 d_{B_1}, d_{B_2} 分别表示 B_1, B_2 中将其肾脏移植给 p_i 的捐赠者;
- (3) $d_{B_1}^+(p_i) = d_{B_2}^+(p_i), d_{B_1} \sim_i d_{B_2}$ 且 $|B_1| < |B_2|$,

其中 $|B_1|, |B_2|$ 分别表示两个连通分支的规模。

当 B_1 不是空图而 B_2 是空图时,规定 $S_1 <_i S_2$ 。

定义2显然是一个字典序。在能够得到肾脏的前提下,病人的关注以其捐赠者所捐肾脏的数量为首,自己所得肾脏的优劣次之,所在调换分支的规模最后。

定义3 (联盟与核心)

- (1) β 的基数不小于2的子集称为联盟;
- (2) 联盟 $S \subseteq \beta$ 阻塞(block)可行解 π 是指存在可行解 σ ,使得 S 恰为 σ 的某个连通分支的顶点集,且对于其中的任意病人 p_i ,恒有 $\sigma <_i \pi$;
- (3) 称可行解的阻塞联盟为极小的是指其任

意真子集均非阻塞联盟;

(4) 不会被任何联盟所阻塞的可行解称为稳定解;

(5) 博弈 Γ 的核心 $Core(\Gamma)$ 是指其所有稳定解的集合。

在不致引起混淆的情况下,病人的集合、病人及其部分捐赠者的集合也可称为联盟。

2 解的结构

定理 1 MDKE 可行解的每个连通分支,或者是一个孤立点,或者是若干棵其根被一个有向圈串联的有向树。

证明 没有得到肾脏,因而也无捐赠者捐出肾脏的病人及其捐赠者在 MDKE 可行解中为孤立点。

其病人得到了肾脏却无须捐赠肾脏的捐赠者也是 MDKE 可行解中的孤立点。

对于 MDKE 可行解的一个非空图连通分支,任选其中一条有向边进行回溯。若该有向边是由某病人指向其捐赠者,则由 MDKE 可行解的定义

可知,该病人必然得到了其他捐赠者的肾脏。若该有向边是由某捐赠者指向一个病人,则该捐赠者必然得到了其病人的许可。所以无论哪种情形,回溯都是可行的,也是唯一的。因为病人、捐赠者的数量有限,若干步回溯之后必然到达某个已经访问过的顶点,从而得到一个有向圈。该有向圈上的顶点是病人及其一个捐赠者的交错序列。

此外,尚可断言:MDKE 可行解的每个非空图连通分支仅包含一个有向圈。反证法。假设某连通分支包含两个有向圈。当两个圈仅有公共点时,无论公共点是病人还是捐赠者,其入度均为 2,与 MDKE 可行解的定义不符。如图 2(a)、(b)。当两个圈有公共边时,任取其中一条公共路径,则该路径的起点入度为 2,同样矛盾。如图 2(c)、(d)。当两个圈没有公共边时,由于它们属于一个连通分支,故各至少包含一个点互相连通。设连接两点的路径上含于两个圈的最后端点分别为 v_1, v_2 。则无论 v_1, v_2 都是病人、都是捐赠者还是病人、捐赠者各一,均导致矛盾。如图 2(e)、(f)、(g)。

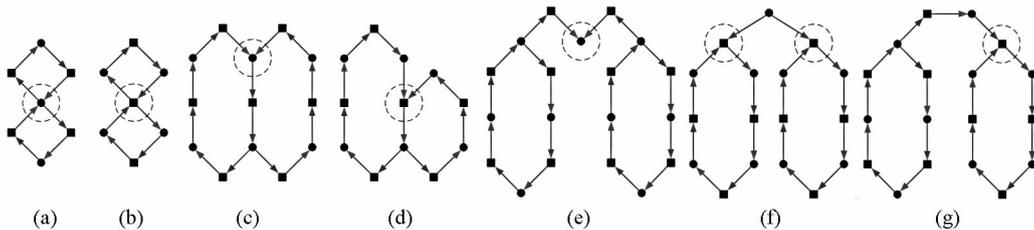


图 2 MDKE 可行解的每个连通分支至多包含一个圈

Fig. 2 Each connected component of a feasible MDKE solution contains at most one cycle

对于 MDKE 可行解的非空图连通分支,删除其中唯一的一个有向圈之后,剩余部分各顶点入度至多为 1 并且不含有向圈,从而必为有向森林。由 MDKE 可行解的定义,该有向森林中的每棵有向树与有向圈连接的唯一可行方式为其根结点为有向圈上某病人的捐赠者。 □

在接下来的论述中,称定理 1 中 MDKE 可行解的第二种连通分支为圈状树丛。图 3 为一个圈状树丛示例。

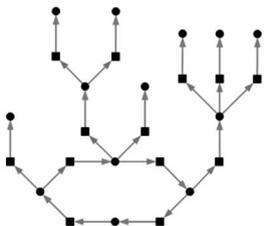


图 3 圈状树丛

Fig. 3 Cycle-shaped grove

的有向圈、孤立点组成。

证明 证明稳定解中的圈状树丛必为有向圈即可。

反证法。假设圈状树丛的树丛部分非空,则圈状树丛中位于有向圈上的病人构成了该连通分支的一个阻塞联盟。任取有向圈中的病人 p_i , 考虑删除圈状树丛中各有向树的操作(保留其位于圈上的树根)。若 p_i 不是任何一棵树的树根则此操作将使 p_i 所在分支规模减小,从而更加稳定。若 p_i 是某棵树的树根,则此操作不仅使 p_i 所在分支规模减小,也减小了其出度,当然更加稳定。 □

回顾 MDKE 中病人评价可行解时所关注的三个因素:其捐赠者所捐肾脏的数量;所得肾脏的优劣;所在调换分支的规模。关注所得肾脏的优劣甚于调换分支的规模是一种合乎常理的偏好。定义 2 将捐赠者所捐肾脏的数量作为首要因素考虑则未必总是与实际情形一致。但有如下结论:

定理 3 对病人而言,许诺捐赠多颗(而不是

定理 2 MDKE 的任意稳定解均由顶点不交

一颗)肾脏以便参与稳定调换或者参与更好的稳定调换(得到更好的肾脏或者参与更小的调换圈)是不可行的。

证明 在定理2的证明中,删除圈状树丛中各有向树这一操作处于核心位置。该操作与病人所捐肾脏的数量及其所得肾脏的优劣无关。因此,无论此二因素何者优先,MDKE稳定解的结构保持不变。□

3 扩展 TTC 算法

TTC 算法最初于文献[8]中被用于求解住房

算法1. 扩展 TTC 算法

输入: 无纠结多捐赠者肾脏调换博弈 Γ

输出: Γ 的一个可行解 $\pi = C_1 C_2 \cdots C_r$

```

1:   $D' = D$ , 轮数  $r = 0$ 
2:  while  $D' \neq \emptyset$  do
3:     $r++$ 
4:    任选病人  $p_0 \in D'$ 
5:    病人  $p_0$  选择  $N_{D'}^-(p_0)$  中其最偏好的捐赠者  $d_1$ ,  $d_1$  回溯到其病人  $p_1$ ,  $p_1$  选择  $N_{D'}^-(p_1)$  中其最偏好的捐赠者  $d_2$ ,  $d_2$  回溯到其病人  $p_2$ , 如此递推, 直至当前病人  $p_k$  最偏好的捐赠者  $d_{k+1}$  对应的病人  $p_{k+1} \in \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$  或者  $N_{D'}^-(p_k) = \emptyset$ 。
6:    if 得到了有向圈  $C$  then
7:       $C_r = C$ 
8:    else
9:       $C_r = \{p_k\}$ 
10:   end if
11:   在  $D'$  中删除位于圈  $C_r$  中的病人及其所有捐赠者
12: end while

```

定义4 MDKE 的第一偏好图是指博弈图 D 的满足下述条件的子图:

(1) $\forall p_i$, 若 $N_{D'}^-(p_i) \neq \emptyset$, 则仅保留其中 p_i 最偏好的捐赠者指向 p_i 的有向边;

(2) $\forall d_{ij}$, 若 $d^+(d_{ij}) = 1$ 则 $d^-(d_{ij}) = 1$, 否则将其删除。

不同于 MDKE 的可行解, 第一偏好图未必是博弈图 D 的生成子图。它包含所有的病人顶点, 而为每个病人保留至多一个捐赠者顶点。一个确定的 MDKE 有唯一确定的第一偏好图。

引理1 第一偏好图的连通分支或者为有向树, 或者为圈状树丛。

证明 依然任选病人作为起点, 在第一偏好图上进行逆向追溯, 直至无法继续追溯或者回到曾经经过的顶点。详细过程与定理1的证明类似, 此处不再详述。□

定理4 扩展 TTC 算法所得可行解是唯一的。

证明 算法1的任意执行都得到一组顶点不交的有向圈。它们显然都是可行解。不难看出, 算法1的执行均在第一偏好图内进行。

分配问题的稳定解。它通过简单的贪心策略得到一系列调换圈。文献[14]对其描述与文献[8]有所不同: 调换圈被划分了批次, 批次内的圈生成顺序任意, 批次间的圈则必须先后生成。如此则算法理解起来更直观, 代价是较复杂的实现及较低的运行效率。而文献[7]则称 TTC 算法为 BSTABLE。

以文献[8]中的 TTC 算法为基础加以修改, 使之适用于无纠结 MDKE。完整描述见算法1。为分析该算法, 需若干准备工作。

由引理1, 行4所选择的病人 p_0 , 在第一偏好图中其所在连通分支或为有向树, 或为圈状树丛。若为前者, 则行5的执行必将回溯到该树的树根, 然后执行9。若为后一情形, 则行5将得到圈状树丛中的有向圈, 然后跳转到行7。所以在第一偏好图的同一连通分支内部选择不同的病人作为 p_0 , 其执行结果相同。

行11删除圈 C_r , 对应于在第一偏好图中删除有向树的树根或者圈状树丛中的有向圈, 将导致若干棵新的有向树的生成。这些树的树根, 称为活跃病人。由于活跃病人须更新其第一偏好捐赠者, 这些新生成的有向树将单独或相互结合形成新的有向树或者圈状树丛, 也可能附着到现有的连通分支之上。需注意的是, 如果附着点位于现有有向树的树根或者圈状树丛的有向圈部分, 则当行11执行到该连通分支的时候, 这些树根被重新激活成为活跃病人。

设第一偏好图中有算法1顺次处理的两个连通分支 A 、 B 。接下来证明无论先后次序如何, 执行结果一致。现设执行顺序为先 A 后 B 。任取一

棵处理 A 之后所生成的有向树 T 。则当且仅当 T 的附着点位于 B 的树根 (若 B 为有向树) 或者有向圈 (若 B 为圈状树丛) 的时候, 将 B 提到 A 之前才会对 T 产生影响。先 A 后 B , 则位于 T 根处的病人最偏好的捐赠者分两次延后一名。先 B 后 A , 则是一次延后两名。两者结果是一致的。

在组合学中我们知道任意两个同级排列都可以通过一些对换互变, 证明完毕。 □

MDKE 可行解的阻塞联盟关于集合的真包含关系 \subset 形成一个严格偏序集。所以一个可行解存在阻塞联盟当且仅当其存在极小阻塞联盟。

引理 2 极小阻塞联盟必为有向圈。

证明 由定义 2 知, 孤立点无法阻塞任何可行解。若阻塞联盟所在的连通分支为圈状树丛, 且其树丛部分非空, 则由定理 2 的证明可知, 其所包含的有向圈也是一个阻塞联盟。 □

一个调换圈可能包含另一个调换圈为其真子集, 所以引理 2 的逆命题不成立。

定理 5 扩展 TTC 算法给出无纠结 MDKE 的一个稳定解。

证明 记算法 1 所得结果为 $\pi = C_1 C_2 \cdots C_r$ 。各圈的生成次序如其下标所示。设圈 S 为阻塞 π 的一个极小阻塞联盟, $j = \min \{i: i \in [r], C_i \cap S \neq \emptyset\}$ 。任取病人 $x \in C_j \cap S$, 则 $d_s^+(x) = d_{C_j}^+(x) = 1$ 。又因为 $S \subseteq C_j \cup C_{j+1} \cup \cdots \cup C_r$, 而 x 在 C_j 中所得肾脏已经是其当前最偏好的一个, 注意到此 MDKE 中无纠结, 所以有 $d_s \sim_x d_{C_j}$ 。如此回溯可得 $S = C_j$, 与 S 阻塞 π 矛盾。 □

扩展 TTC 算法的时间复杂度仍为 $O(m)$ 。鉴于 TTC 算法仅适用于无纠结情形, 文献 [14] 提议通过规定优先次序的方法破解纠结, 使之适用于一般的住房市场。但对某些包含纠结的实例 [15], 无论怎样破解纠结, TTC 算法给出的解都不是最优的。此结论同样适用于算法 1。

4 稳定解的难解性

如前所述, MDKE 稳定解中的有向圈是病人及其一个捐赠者所构成的交错序列。考虑 MDKE 稳定解中有向圈上的一个 3 顶点有向链 $p_i \rightarrow d_{ij} \rightarrow p_k$ 。若该解是由扩展 TTC 算法所得, 则 d_{ij} 虽然未必是 p_k 内邻域中的最佳匹配者, 但却一定是 p_i 外邻域中与 p_k 匹配程度最佳的一个。在一般的稳定解中情形可能并非如此。其原因在于定义 3 中的稳定性是一种弱稳定: 两个包含相同病人集合的调换圈, 只要各含相异病人符合上述条件, 则它们的稳定性不可比较。若以 p_i 外邻域中与 p_k 匹配程度最

佳的捐赠者替换 d_{ij} , 则得到一个新的稳定解。对一个稳定解中的每个病人执行该替换, 记为 R_1 。它是一个从 $\text{Core}(\Gamma)$ 到 $\text{Core}(\Gamma)$ 的映射。借助 R_1 , 可将 KE 模型的一些复杂性结论拓展到 MDKE。

定理 6 对于 MDKE, 其稳定解的存在性是一个 NP 难解问题, 且 $\forall \varepsilon > 0$, 寻找覆盖最多病人的稳定解这一问题没有近似比为 $n^{1-\varepsilon}$ 的近似算法。

证明 考虑 KE 模型的如下多捐赠者扩展: 将每个病人的多个捐赠者看作一个虚拟捐赠者; 每个局中人代表一个病人及其虚拟捐赠者; 局中人 p_i 对局中人 p_r 的偏好程度等于 p_i 与 p_r 所有捐赠者的匹配程度的最佳值。

映射 R_1 的像 $R_1(\text{Core}(\Gamma))$ 与上述扩展 KE 的核心之间显然存在简单的双射对应, 记为 R_2 。从 MDKE 核心到扩展 KE 核心的复合映射 $R_2 \circ R_1$ 是一个满射。所以 MDKE 稳定解的存在性等价于扩展 KE 稳定解的存在性。而单捐赠者 KE 显然是带虚拟捐赠者的扩展 KE 的子问题, 关于其稳定解存在性的 NP 难解性论断也适用于后者, 从而也适用于 MDKE。

注意到 R_1, R_2 均为覆盖数相同的解之间的变换。所以单捐赠者 KE 的 $n^{1-\varepsilon}$ 的不可近似性也适用于 MDKE。 □

5 实验

为检验将 KE 拓展到 MDKE 的效果, 本节进行一组仿真实验。

首先生成标准的 KE 实例, 然后将其拓展到分别有 20%、40% 和 60% 的病人拥有 2 名捐赠者的 MDKE 实例。所有实例均含 80 名病人。TTC 算法所得稳定解未必有最大覆盖, 但其运行结果足以展示将 KE 拓展到 MDKE 所产生的效果。关于病人与捐赠者的配型, 本实验采用文献 [12] 中的 3 种模型进行模拟。在随机图模型中, 任意病人与任意捐赠者的配型存在一个固定的拒绝概率 r (0.3、0.5 或 0.7)。在 ABO 模型中, 血型作为一个影响配型的因素被考虑进来。任意的人, 无论是病人还是捐赠者, 其血型依据表 2 所示概率分布随机生成。若捐赠者的血型和病人的血型不冲突, 则两者以 $1-r$ 的概率成功配型。在 ABO2 模型中, 病人和捐赠者的血型分布取自表 3。其中数据特别考虑了 O 型

表 2 ABO 模型中的血型分布 [12]

Tab. 2 Blood type frequencies for ABO model

血型	O	A	B	AB
频率 (%)	48	34	14	4

表3 ABO2 模型中的血型分布^[12]

Tab.3 Blood type frequencies for ABO2 model

频率(%)	捐赠者			
	O	A	B	AB
病人 O	14.0	37.8	12.0	2.0
病人 A	6.3	6.8	5.1	2.8
病人 B	2.4	6.1	1.2	2.1
病人 AB	0.5	0.5	0.2	0.1

血捐赠者可将肾脏捐与任意血型的病人,而 O 型

病人仅能接受来自 O 型血捐赠者这一情况,因而较表 2 更加贴近实际。所有实验均重复 1000 次取平均值。实验结果见表 4。

实验显示,无论何种模型,也无论拒绝概率大小,将 KE 拓展到 MDKE 之后,TTC 算法下的平均覆盖率均有提高,且在最接近真实情况的 ABO2 模型中提高程度最显著。拥有多位捐赠者的病人所占比例越高,得到合适肾脏的病病人的比例也越高。这与我们的预期一致。

表4 包含 80 名病人的 KE 及 MDKE 实例中 TTC 算法的平均覆盖率(%)

Tab.4 Average cover percentage of TTC for KE and MDKE samples with 80 patients(%)

	随机图 _r				ABO _r		ABO2 _r		
	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7	0.3	0.5	0.7
KE	98.71	97.68	95.50	77.87	76.20	72.33	44.66	42.26	38.05
MDKE _{0.2}	98.71	97.87	95.71	80.49	78.93	75.26	48.29	46.11	42.11
MDKE _{0.4}	98.78	97.93	95.79	83.26	81.65	78.39	52.08	50.16	46.29
MDKE _{0.6}	98.80	98.01	96.14	86.01	84.71	81.59	56.07	53.83	50.43

6 结束语

本文通过对标准肾脏调换模型进行拓展,解决了包含多捐赠者病人的肾脏调换有效表示的问题,证明了单捐赠者肾脏调换问题的一些算法和复杂性结论依然适用,并且指出在仅考虑稳定解的条件下,拥有多个捐赠者所能带来的相对优势是相当有限的。所做实验表明允许单病人多捐赠者可有效提高病人得到匹配肾脏的几率。

对于一个由多个顶点不交有向圈构成的稳定调换,同一个圈中的手术同时进行,可以有效避免有人食言,但是不同圈中的手术先后进行是不可避免的。此时仍然面临下述问题:对于一个确定的肾脏调换问题实例,完成一个圈的手术之后稳定解的稳定性保持不变,但现实中随着现有病人的逝去及新病人的加入,这一论断未必成立。办法之一是放弃静态的离线分析,而以动态的在线分析取而代之。此外也可考虑不完全公开病人之间的匹配信息。这样不仅可以更好地保护病人的隐私,也可以更加从容地考虑社会效用最大化的最大覆盖调换。此时拥有多个捐赠者的病人的优势可能会更加明显。需注意的是病人之间的匹配信息可能牵扯到收治病人的医院以及可能存在的本地肾脏调换机构等第三方。需要仔细设计不完全信息博弈的机制,以抑制第三方为了自身利益而破坏调换的冲动。

参考文献(References)

[1] The organ procurement and transplantation network[EB/OL].

- [2013-03-01]. <http://optn.transplant.hrsa.gov/>.
- [2] Roth A E, Sönmez T, Ünver M U. Kidney exchange[J]. Quarterly Journal of Economics,2004, 119(2): 457-488.
- [3] Cechlárová K, Fleiner T, Manlove D. The kidney exchange game[C]//Proceedings of the 8th International Symposium on Operations Research in Slovenia,2005:77-83.
- [4] Cechlárová K, Hajduková J. Stability testing in coalition formation games [C]//Proceedings of the 5th International Symposium on Operations Research in Slovenia, 1999: 111-116.
- [5] Cechlárová K, Hajduková J. Computational complexity of stable partitions with B-preferences[J]. International Journal of Game Theory,2002, 31(3): 353-364.
- [6] Biró P, Cechlárová K. Inapproximability of the kidney exchange problem[J]. Information Processing Letters, 2007, 101(5): 199-202.
- [7] Cechlárová K, Romero-Medina A. Stability in coalition formation games [J]. International Journal of Game Theory, 2001, 29(4): 487-494.
- [8] Shapley L, Scarf H. On cores and indivisibility[J]. Journal of Mathematical Economics,1974, 1(1): 23-37.
- [9] Abraham D, Cechlárová K, Manlove D, et al. Pareto optimality in house allocation problems[M]//Algorithms and Computation,Berlin: Springer, 2004: 1163-1175.
- [10] Irving R W. The cycle roommates problem, a hard case of kidney exchange [J] Information Processing Letters, 2007, 103(1): 1-4.
- [11] Huang C. Circular stable matching and 3-way kidney transplant[J]. Algorithmica,2010, 58(1): 137-150.
- [12] Cechlárová K, Lacko V. The kidney exchange problem: How hard is it to find a donor? [J]. Annals of Operations Research,2012, 193(1): 255-271.
- [13] Biró P, McDermid E. Three-sided stable matchings with cyclic preferences[J]. Algorithmica,2010, 58(1): 5-18.
- [14] Roth A E. Incentive compatibility in a market with indivisible goods[J]. Economics Letters,1982, 9(2): 127-132.
- [15] Alcalde U J, Molis E. Exchange of indivisible goods and indifferences: The top trading absorbing sets mechanisms[J]. Games and Economic Behavior,2011, 73(1): 1-16.