

# Ka 波段过模慢波结构色散曲线的数值求解\*

武大鹏, 舒挺, 张华

(国防科技大学 光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**运用场匹配法, 结合 Ka 波段过模慢波结构的实际情况, 进行轴对称周期慢波结构色散关系的理论推导, 得到了一种快速、准确计算适应 Ka 波段过模慢波结构的色散特性计算方法。根据推导结果, 采用 MATLAB 程序编程计算了 Ka 波段过模盘荷波导的色散曲线。将计算得到的色散曲线与成熟的商业软件计算得到的结果进行了对比, 两者误差在 2% 以内, 验证了数值算法的可靠性。计算得到的色散曲线可以辅助选取 Ka 波段微波源的结构参数, 对器件设计有一定参考价值。

**关键词:**色散曲线; Ka 波段过模慢波结构; 数值计算算法

**中图分类号:** TN12      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-2486(2015)02-028-04

## Numerical computation of dispersion curves in the Ka-band overmoded slow wave structure

WU Dapeng, SHU Ting, ZHANG Hua

(College of Optoelectronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Backward wave oscillator with over-mode Ka-band high power microwave (HPM) generally outputs mixed TM<sub>0n</sub> modes, it has high energy conversion efficiency, but it can't ensure the purity of output modes. However, it is necessary for high radiation efficiency that the microwave input to the radiation terminal is certain single and pure. So it is hard to put these HPM sources into application. In order to solve this problem, a design method for compact hybrid modes converter of purifying TM<sub>0n</sub> mixed modes was proposed. With this method, the TM<sub>01</sub>, TM<sub>02</sub> and TM<sub>03</sub> mixed modes can be converted into pure circular waveguide TM<sub>01</sub> mode efficiently on the condition of high power capacity and wide wave band. This method also reduces the modes purification difficulty in the design of the HPM sources.

**Key words:** dispersion curve; Ka-band overmoded slow-wave structure; numerical computing method

在高功率微波源器件的设计和研制过程中, 需要了解其慢波结构的色散特性。慢波结构色散关系的场匹配解法已经发展得较为完善<sup>[1-4]</sup>, 但是在高频段(例如, 频率高于 30GHz)大过模比情况下, 采用通用方法推导得到的色散方程数值计算较为困难。本文针对 Ka 波段慢波结构的特殊情况, 推导了一种针对高频段轴对称慢波结构快速有效的色散特性求解方法。该方法在边界处直接积分计算, 没有通用算法中傅里叶级数展开, 在保证一定计算精度的前提下, 简化了计算过程, 提高了计算速度。

### 1 理论推导

如图 1 所示, 本文采用的慢波结构为具有矩形截面的轴对称盘荷结构。此种类型的慢波结构常

用于高频段微波源中<sup>[5-9]</sup>, 具有结构简单、加工容易的优点。慢波结构的基本尺寸参数为: 漂移管的半径  $R$ , 慢波结构的周期  $Z_0$ , 高度  $h$ , 盘荷间距  $d$ , 电子束半径  $r_b$ 。由于慢波结构器件中几何机构和电子束的圆周对称特性, 参与束相互作用的主要是具有圆周对称的结构和轴向电场分量的 TM<sub>0n</sub> 模式, 这里仅讨论这些模式的色散特性。为了简化计算, 做如下几点合理假设: 慢波结构轴向无限长, 所分析区域内的任意点可以认为距离场源无限远; 轴向约束磁场无穷大, 电子束仅有沿  $z$  方向的一维速度分量; 电子束的厚度忽略不计, 但是具有有限大的总电流  $I_b$ ; 忽略各个场分量和电子束参量的高阶扰动量, 如电子速度  $v = v_0 + v_1$ 。

TM<sub>0n</sub> 模式仅有轴向电场  $E_z$ 、径向电场  $E_r$  和角向磁场  $H_\phi$  三个不为零的场分量。根据 Floquet 定

\* 收稿日期: 2015-01-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11075211)

作者简介: 武大鹏(1988—), 男, 山东沂水人, 博士研究生, E-mail: vipbenjamin@163.com;

舒挺(通信作者), 男, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: mrtingshu@qq.com

理,轴向电场分量可以分解为级数展开的形式<sup>[10]</sup>

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_{zn}(r) e^{j(k_n z - \omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_{zn}(r) e^{j(k_n z - \omega t)} \quad (1)$$

式中  $k_n = k_0 + nh_0$ ,  $h_0 = 2\pi/z_0$ ,  $-h_0/2 \leq k_0 < h_0/2$ 。

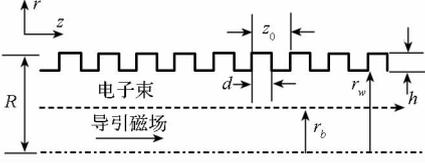


图1 具有矩形截面的轴对称慢波结构示意图

Fig.1 Diagram of axial symmetric SWS with rectangular section

求解区域的各次谐波的轴向电场  $E_{zn}$  满足 Maxwell 方程组,整理可得

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dE_{zn}}{dr} \right) + \Gamma_n^2 E_{zn} = 0, r \neq r_b \quad (2)$$

式中  $\Gamma_n^2 = \omega^2/c^2 - k_n^2$ 。

其他场分量可以用轴向电场分量表示

$$E_m = -\frac{jk_n}{\Gamma_n^2} \frac{\partial E_{zn}}{\partial r} \quad (3)$$

$$I_{mn}^J = \int_{-z_0/2}^{z_0/2} e^{-j(m-n)h_0 z} J_0(\Gamma_n r_w) dz$$

$$= J_0[\Gamma_n(R-h)] \left( \int_{-z_0/2}^{-(z_0-d)/2} e^{-j(m-n)h_0 z} dz + \int_{(z_0-d)/2}^{z_0/2} e^{-j(m-n)h_0 z} dz \right) + J_0(\Gamma_n R) \int_{-(z_0-d)/2}^{(z_0-d)/2} e^{-j(m-n)h_0 z} dz$$

$$= \begin{cases} \frac{2j \sinh[(m-n)h_0(z_0-d)/2]}{(m-n)h_0} \{J_0[\Gamma_n(R-h)] - J_0(\Gamma_n R)\}, & \text{for } m \neq n \\ J_0[\Gamma_n(R-h)]d + J_0(\Gamma_n R)(z_0-d), & \text{for } m = n \end{cases}$$

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\alpha_A = \frac{\pi I_b}{\beta_b \gamma_b^3 I_A}$ 。当电子束电流  $I_b$  为零时,退化为不含电子束的色散方程。方程有非零场解的条件为

$$\det(D) = \det[D_{mn}] = 0 \quad (9)$$

式(9)即是慢波结构的色散方程。

## 2 数值求解方法

编制了 MATLAB 计算程序,数值求解色散方程,求解步骤如下。

- 1) 对基波轴向波数  $k_0$  取一系列离散值,据此确定各次谐波的轴向波数  $k_n = k_0 + nh_0$ ;
- 2) 对各个  $k_0$ ,使用二分法<sup>[4]</sup>求解  $\omega$  的值;
- 3) 每个  $k_0$ ,有多个不同的  $\omega$  解,将它们按从小到大的顺序加注标记  $\omega^{(1)}$ ,  $\omega^{(2)}$ ,  $\dots$   $\omega^{(n)}$ ,则数组  $(k_0, \omega^{(1)})$  为  $TM_{01}$  模式色散曲线上的点,数组  $(k_0, \omega^{(2)})$  为  $TM_{02}$  模式色散曲线上的点,……数组  $(k_0, \omega^{(n)})$  为  $TM_{0n}$  模式色散曲线上的点;
- 4) 依次连接不同  $k_0$  取值对应的所有  $(k_0,$

$$H_{\varphi n} = -\frac{j\omega\epsilon_0}{\Gamma_n^2} \frac{\partial E_{zn}}{\partial r} \quad (4)$$

式(2)的基本解形式为

$$E_{zn} = A_n J_0(\Gamma_n r), 0 \leq r \leq r_b$$

$$= B_n J_0(\Gamma_n r) + C_n N_0(\Gamma_n r), r_b < r \leq r_w \quad (5)$$

其中  $J_0(x)$  为零阶第一类 Bessel 函数。在波导壁处需满足切向电场为零的边界条件

$$E_z + E_r \frac{dR_w(z)}{dz} \Big|_{r=R_w(z)} = 0 \quad (6)$$

其中  $R_w(z)$  为  $z$  处的波导壁半径。在电子束处的边界条件为<sup>[11]</sup>

$$\frac{dE_{zn}}{dr} \Big|_{r_b}^{r_w} = \frac{2\Gamma_n^2 c^2}{r_b(\omega - k_n v_b)^2} \frac{I_b}{\beta_b \gamma_b^3 I_A} E_{zn}(r_b) \quad (7)$$

结合边界条件式(6)和式(7),式(5)可以整理为矩阵的形式

$$D \cdot A = 0 \quad (8)$$

$$D_{mn} = \left( \frac{\omega^2 - k_m k_n c^2}{\Gamma_n^2 c^2} \right) \left\{ I_{mn}^J - \alpha_A \left( \frac{\Gamma_n c}{\omega - k_n v_b} \right)^2 \times J_0(\Gamma_n r_b) [I_{mn}^J N_0(\Gamma_n r_b) - I_{mn}^N J_0(\Gamma_n r_b)] \right\}$$

其中

$\omega^{(n)}$ ,构成  $TM_{0n}$  模式色散曲线。

在计算色散矩阵  $D$  时,我们取的矩阵阶数为 5~7 阶,具体阶数的确定原则是:逐次增大矩阵阶数,直到相邻两种阶数下求解得到的色散曲线偏差在 1% 以内。例如图 2 所示为矩阵阶数分别取 4,5 和 6 阶时  $TM_{01}$  模式的色散曲线示意图,可以看出矩阵取 4 阶时色散曲线与取 5 阶时偏差较

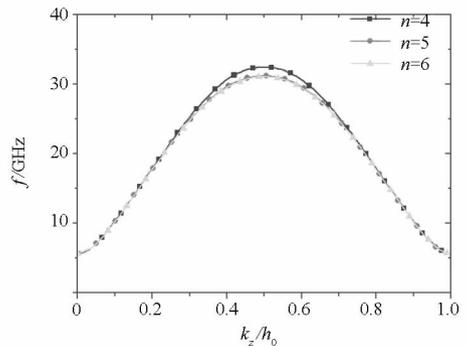


图2 不同矩阵阶数下的色散曲线(以  $TM_{01}$  为例)

Fig.2 Dispersion curves in different matrix ranks (take  $TM_{01}$  as an example)

大,而取 5 阶和取 6 阶时偏差较小。综合考虑准确性和计算时间,可以取 5 阶矩阵进行计算。本方法由于处理波导壁处边界时,没有采用常见的傅里叶展开拟合边界形状的方法,而是直接将边界形状函数代入求解,简化了计算过程。

### 3 计算结果和相关讨论

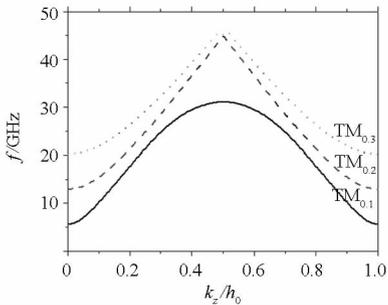
选取 Ka 波段高功率微波源<sup>[5]</sup>的一组典型尺寸参数(具体参数值见表 1),数值计算了其色散特性。

表 1 Ka 波段高功率微波源的典型尺寸参数

Tab.1 Parameters of the Ka-band HPM device (mm)

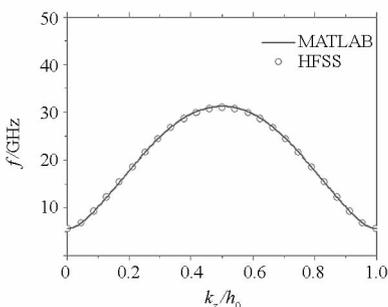
$Z_0$	$R$	$d$	$h$
3.4	21.0	1.8	1.4

如图 3 所示,是计算得到的  $TM_{01}$ ,  $TM_{02}$  和  $TM_{03}$  模式的色散曲线,通过与高频电磁仿真软件 HFSS 计算得到的同样尺寸参数条件下的色散曲线进行对比,发现二者吻合较好,相对误差小于 2%。值得指出的一点是,使用高频电磁仿真软件计算色散曲线建模比较烦琐,而且由于计算区域相对于微波波长较大(结构直径约为波长的 4~5 倍),剖分网格数目巨大,计算耗时较长。



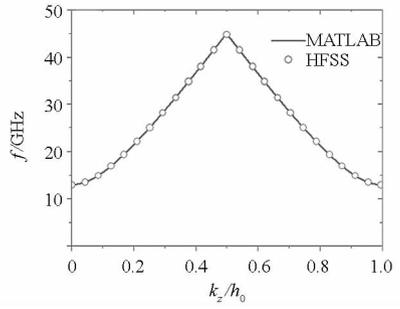
(a) MATLAB 数值计算得到的  $TM_{01}$ ,  $TM_{02}$  和  $TM_{03}$  模式的色散曲线

(a) Dispersion curves of  $TM_{01}$ ,  $TM_{02}$  and  $TM_{03}$  (MATLAB)



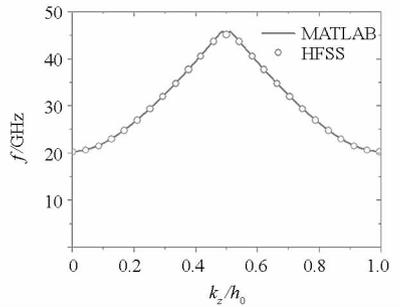
(b) 模式数值计算结果与软件计算结果的对比 ( $TM_{01}$ )

(b) Result comparison between MATLAB and software simulation ( $TM_{01}$ )



(c) 模式数值计算结果与软件计算结果的对比 ( $TM_{02}$ )

(c) Result comparison between MATLAB and software simulation ( $TM_{02}$ )



(d) 模式数值计算结果与软件计算结果的对比 ( $TM_{03}$ )

(d) Result comparison between MATLAB and software simulation ( $TM_{03}$ )

图 3 MATLAB

数值计算得到的色散曲线

Fig.3 Result dispersion curves calculated by MATLAB program

### 4 结论

本文理论推导了一种计算色散特性的数值方法,并据此编制 MATLAB 数值程序。与商业软件计算结果相比,采用该数值算法编程得到的结果频率相对偏差在 2% 以内,且大大减少了计算时间。相关计算方法适用于 Ka 波段微波源结构参数的辅助选取,具有快速、准确的优点。

### 参考文献 (References)

- [1] Swegle J A, Poukey J W, Leifeste G T. Backward wave oscillators with rippled wall resonators: Analytic theory and numerical simulation [J]. Physics of Fluids. 1985, 28(9): 2882 - 2894.
- [2] Minami K, Carmel Y, Granatstein V L, et al. Linear theory of electromagnetic wave generation in a plasma-loaded corrugation-wall resonator [J]. IEEE Transactions on Plasma Science. 1990, 18(3): 537 - 545.
- [3] 李大治, 杨梓强, 梁正. BWO 慢波结构几何参数的研究[J]. 电子科技大学学报. 1998, 27(1): 63 - 68. Li Dazhi, Yang Ziqiang, Liang Zheng. Research on geometry parameters of BWO slow-wave structure [J]. Journal of UEST of China. 1998, 27(1): 63 - 68. (in Chinese)

- [4] 董焯, 董志伟, 周海京. 含电子束任意轴对称周期慢波结构色散曲线的数值计算[J]. 微波学报. 2007, 23(5): 53-58.  
Dong Ye, Dong Zhiwei, Zhou Haijing. Numerical computation of dispersion curves in an arbitrary axial symmetric periodic SWS including an electron beam [J]. Journal of Microwaves. 2007, 23(5): 53-58. (in Chinese)
- [5] Zhu J, Shu T, Zhang J, et al. A high power Ka band millimeter wave generator with low guiding magnetic field[J]. Physics of Plasmas, 2010, 17: 083104.
- [6] Zhang J, Zhong H H, Jin Z, et al. Studies on efficient operation of an X-band oversized slow-wave HPM generator in low magnetic field [J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 2009, 37(8): 1552-1557.
- [7] Zhang H, Shu T, Ju J C, et al. Gigawatt-class radiation of  $TM_{01}$  mode from a Ku-band overmoded cerenkov-type high-power microwave generator[J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 2014, 42(6): 1567-1572.
- [8] Wu D, Shu T, Zhu T, et al. Mode composition analysis on experimental results of a Gigawatt-class Ka-band overmoded Cerenkov oscillator [J]. Physics of Plasmas, 2014, 21:073105.
- [9] Li X, Song Z, Wang J, et al. Design and numerical simulations of a high power 0.15 THz oscillator [J]. Physics of Plasmas, 2012, 19:083111.
- [10] Watanabe T, Choyal Y, Minami K, et al. Range of validity of the rayleigh hypothesis. [J] Physics Review E, 2004, 69(5):056606.