§3 费马原理
(Fermat's principle)

Pierre de Fermat

(1601 or 1607/8-1665)

France,

amateur mathematician.

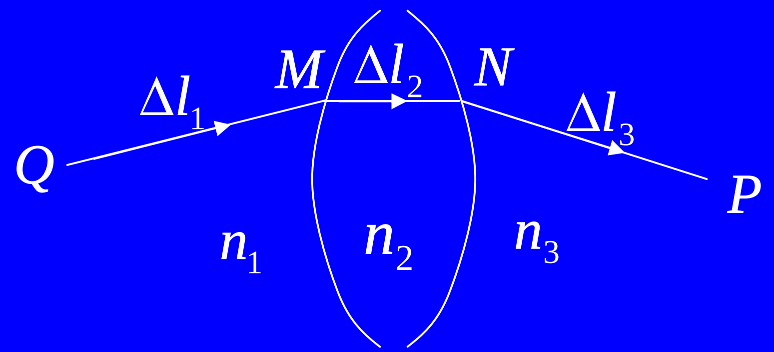
He also made notable contributions to analytic geometry, probability, and optics.

3.1 光程(optical path)

光线经过的路程与所经路程中介质折射率的乘积。

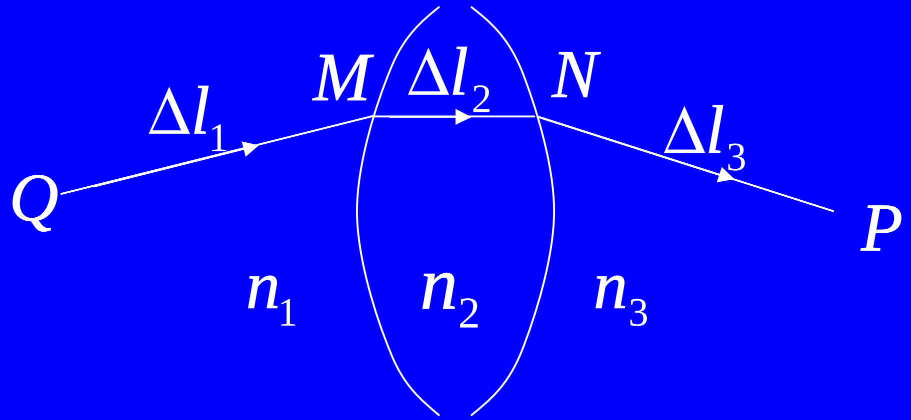
在均匀媒质中有： $(QP)=n\cdot l$

在几种不同的媒质中有： $(QP)=\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot l_i$



在折射率连续变化的媒质中： $(QP)=\int_Q^P n\,dl$

光程的理解：

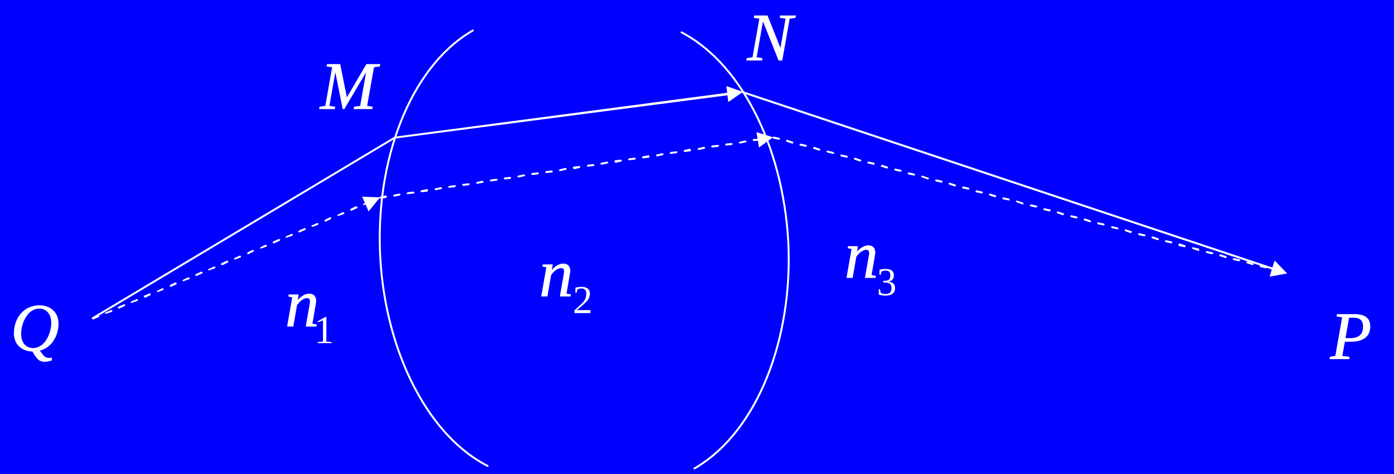


光从Q点到P点所用时间：

$$t_{QP} = \sum_i \frac{\Delta l_i}{u_i} = \sum_i \frac{n_i \Delta l_i}{c} = (QMNP)/c$$

光在媒质中走过的光程等于在相同时间里在真空中的传播距离。

3.2 费马原理的表述



两点间光线的实际路径就是光程取平稳的路径。（和邻近的路径比较）

平稳：函数在某处平稳，指它的一阶微分为0。

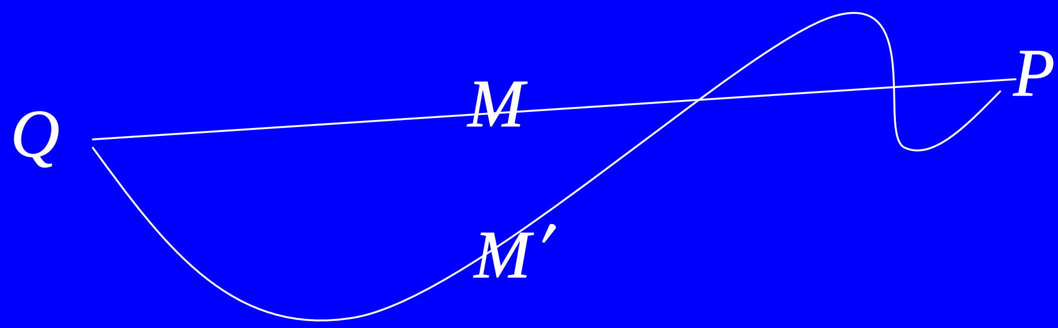
$$d(QP) = d\int_Q^P n dl = 0$$

$$(QP) = \int_Q^P n dl = \text{极大值，极小值，} or \text{ 恒定值}$$

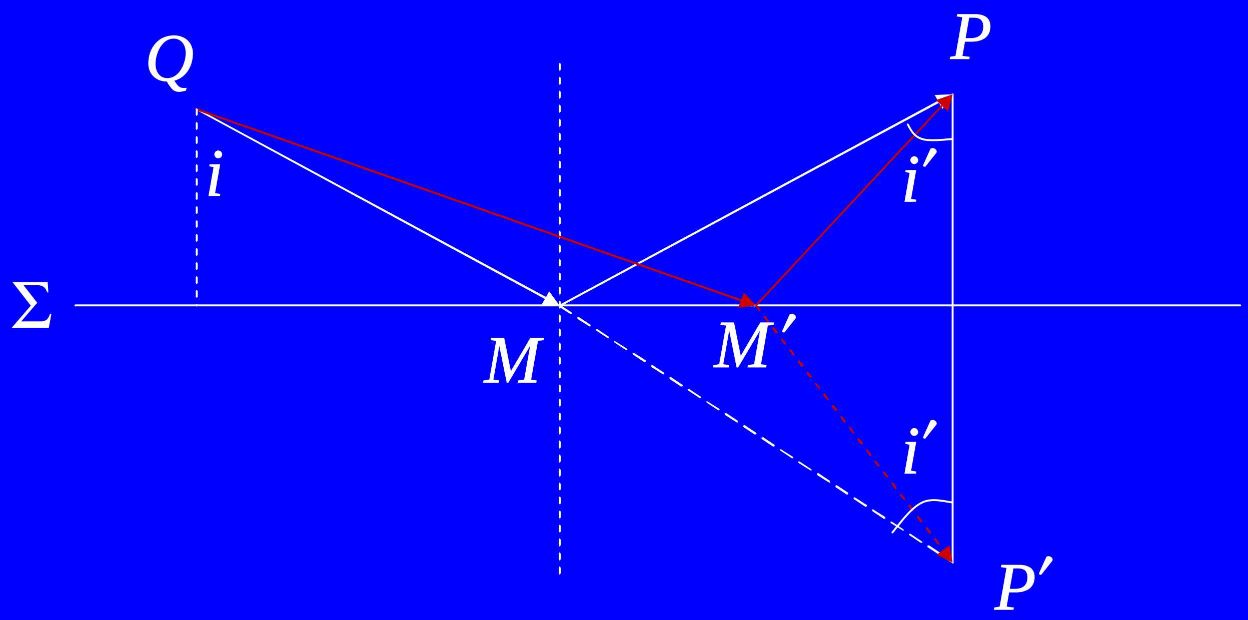
3.3 由费马原理推导几何光学三定律

1、均匀介质中的直线传播定律

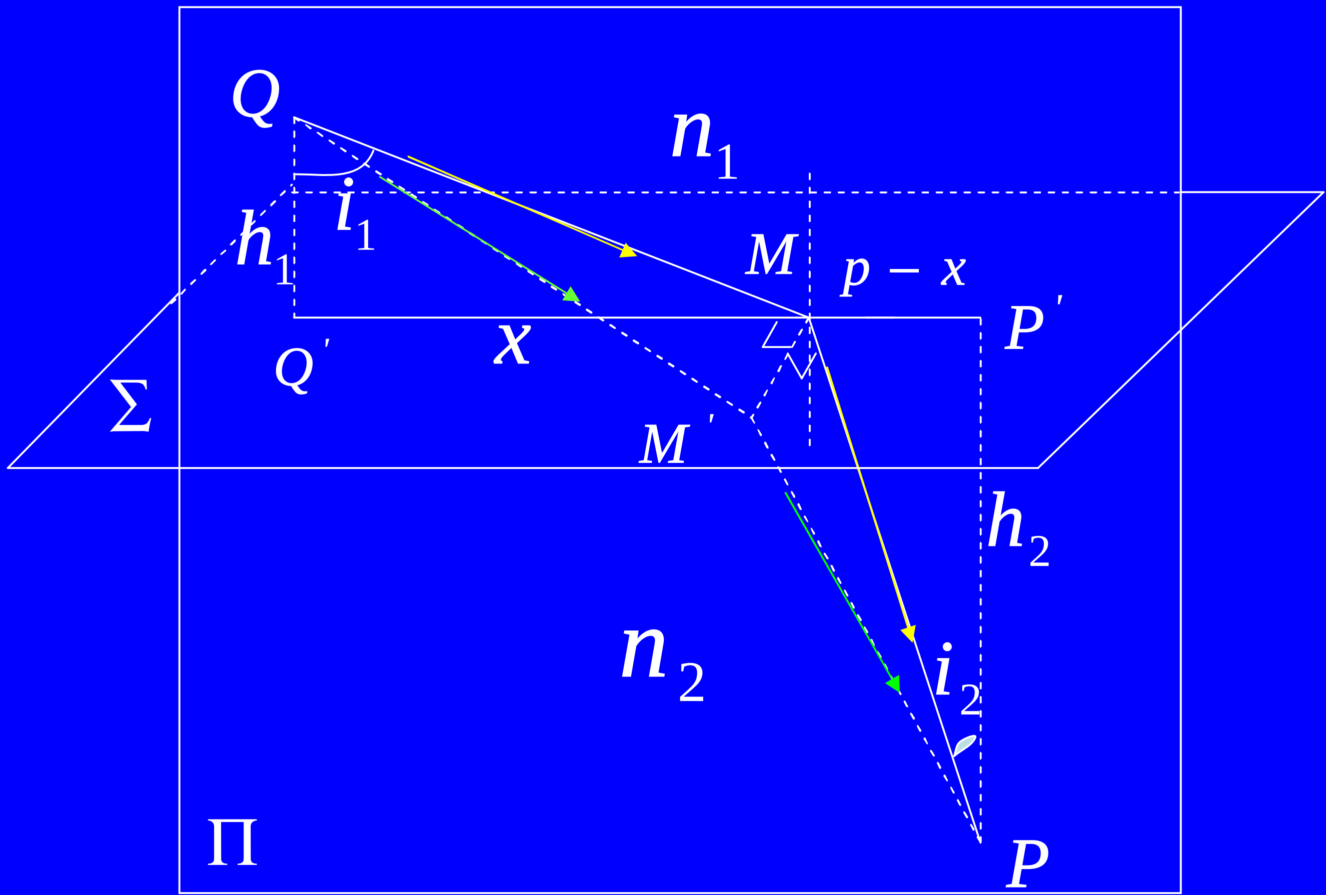
光程取极小值。



2、反射定律　　　　光程取极小值。

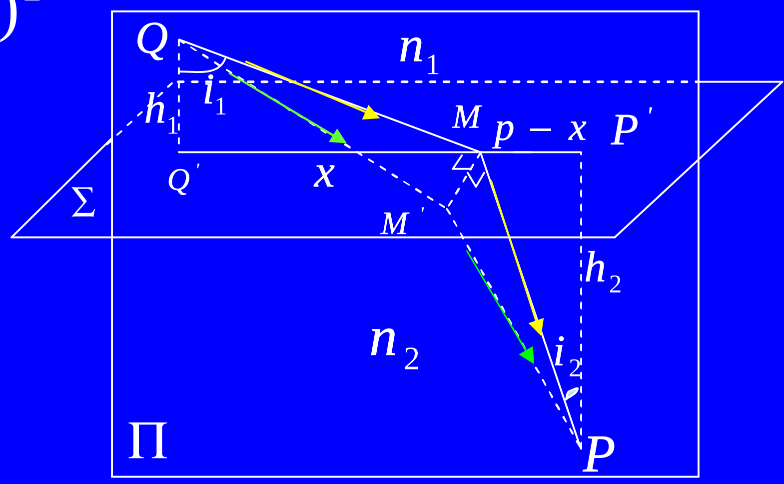


3、折射定律　　　　光程取极小值。



$$(QMP) = n_1 \overline{QM} + n_2 \overline{MP}$$

$$= n_1 \sqrt{h_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}$$



$$\frac{d}{dx}(QMP) = \frac{n_1 x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (p-x)}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}}$$

$$= n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2$$

由光程取极小值条件 $d(QMP)/dx = 0$

即得 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

附录：

微分与变分的区别：

1. 单元函数：$y = f(x)$

1)增量：$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + O(\Delta x^2)$

其中：$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ ---- f (x)的微商

2)微分：$dy = f'(x)\Delta x$ ----Dy中正比于Dx的线性主部

3) 平稳：$dy = 0$ ----称函数在该处平稳

$d^2 y > 0$ ----极小值

$d^2 y < 0$ ----极大值

2. 多元函数： $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

1)增量： $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i)\Delta x_i + O(\Delta x_i^{\ 2})$$

其中： $f_i'(x) = \dfrac{dy}{dx_i}$ ---- f 对x_i的偏微商

2)微分： $dy = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i)\Delta x_i$ ----Dy中正比于Dx_i的线性主部

3) 平稳： $dy = 0$ ----称函数在该处平稳

$d^2 y > 0$ ----极小值

$d^2 y < 0$ ----极大值

3. 泛函---广义多元函数： $y = f(x_1, x_2, \ldots)$

----无穷多个自变量

光程： $(QP) = \int_{Q\,(L)}^{P} n dl$

---- 是路径L的函数

---- L是空间坐标的函数

---- 光程是路径L的泛函

变分： 广义多元函数的微分

$$d(QP) = d\int_Q^P n dl$$

平稳： $d(QP) = 0$ ----称函数在该处平稳