第 43 卷第 11 期 红外与激光工程 2014 年 11 月
Vol.43 No.11 Infrared and Laser Engineering Nov. 2014

结构函数在大口径光学系统评价中的应用

杨 飞[1,2],刘国军[1],安其昌[2]

(1. 长春理工大学 高功率半导体激光国家重点实验室,吉林 长春 130022;
2. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所,吉林 长春 130033)

摘 要:为了降低大口径望远镜在研制和使用过程中的技术风险,将从结构函数的角度对大口径望远镜光机系统评价方法进行分析和研究。首先通过理论计算得出结构函数与光机系统评价的常用指标——斯特利尔比以及系统波像差均方根的关系,并对于结构函数的具体求解方法进行了讨论;然后对于低阶 Zernike 项对应的系统低频波像差以及 Kolmogorov 谱反演代表的高频系统波像差进行了分析,得出结构函数在不同的评价尺度下系统斯特利尔比的变化趋势。由于大气相干长度与系统结构函数有直接关系,且直接影响到大口径光学系统的使用效果,最后基于极大似然估计提出了一种大气相干长度估计方法。

关键词:大口径望远镜; 斯特利尔比; 结构函数; 极大似然估计

中图分类号:TH751 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-2276(2014)11-3832-05

Application of structure function on large aperture optical system evaluation

Yang Fei[1,2], Liu Guojun[1], An Qichang[2]

(1. State Key Laboratory of High Power Semiconductor Laser, Changchun University of Sciences and Technology, Changchun 130022, China;
2. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

Abstract: In order to reduce the risk for development and using of large aperture telescope, structure function was discussed in this paper. Firstly, the relationship between structure function and Strehl ratio was gotten in theory, and the method for calculating structure function was founded. Then, after low order ones of Zernike polynomial were analyzed, simulating the low order disturbance, the Kolmogorov spectrum was used to simulate the high ones, getting the tendency of strehl ratio in different dimension. Because of the direct relationship between coherent length and structure function, and the influence of the coherent length on the performance of the large aperture optical system, a method for evaluating the coherent length was proposed based on maximum likelihood method.

Key words: large aperture telescope; Strehl ratio; structure function; maximum likelihood method

收稿日期:2014-03-10; **修订日期**:2014-04-20

基金项目:国家自然科学基金(11403022)

作者简介:杨飞(1982-),男,副研究员,博士生,主要从事地基大口径光电望远镜光机系统方面的研究。Email:yangflying@163.com

导师简介:刘国军(1964-),男,教授,博士,主要从事光电子器件与技术的研究。Email:gjliu626@126.com

0 引　言

随着科学技术的不断发展,对于大气层内工作的光学系统，其成像能力不仅与本身的制造精度有关,大气湍流也成为限制光学系统性能的重要因素[1-5]。

传统上光学系统的评价与误差分配的指标为波像差均方根。对于小口径系统,由于视场有限,在局部范围内可以认为大气视宁条件良好，在评价的时候只需考虑系统本身设计制造的误差；但对于大口径光学系统，大气的各向异性以及静力学不同源性将大大制约系统的成像能力。不考虑使用环境而直接对大口径光学系统进行成像质量评价以及误差分配,将给系统后续的制造与使用带来巨大的困难。

大气相干长度 r_0 是描述大气视宁的重要参数,在大气相关长度内,认为大气视宁条件良好、系统的高频扰动为宽平稳过程;另一方面,国外的光机工程师提出了利用结构函数来评价光学系统的频域特性[6-7]。文中将基于结构函数利用斯特利尔比对大口径望远镜光机系统的评价方法进行分析和研究[8-10]。

首先，文中通过理论计算得出结构函数以及系统波像差均方根的关系并结合光机系统评价的常用指标——斯特利尔比的经典算法得出其与结构函数的关系。在对于结构函数的具体求解方法进行讨论之后,对于低阶 Zernike 项对应的系统低频波像差以及 Kolmogorov 谱反演代表的高频系统波像差进行了分析,通过对于系统波像差的分析,得出不同的评价尺度下系统斯特利尔比的变化趋势。最后针对专门测量大气相干长度需要额外设计仪器以及光路的情况，基于极大似然估计提出了一种大气相干长度的估计方法。

1 基本推导

1.1 结构函数

为了更好地评价系统波像差，对于非均匀各项同性的局部均匀各项同性随机场，空间相关函数不只与两点间的空间距离有关,还与其各自的位置有关。具体来说,对于实际的系统波像差 $\phi(\mathbf{x})$只有在比较小的范围内为宽平稳过程,故对其取增量相关函数为:

$$\mathbf{SF}(\mathbf{r})=\langle(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\phi(\mathbf{x}))^2\rangle_{\mathbf{x}} \tag{1}$$

公式(1)即为国外的一些学者提出的结构函数[11],对公式(1)进行变形可得：

$$\mathbf{SF}(\mathbf{r})=\langle(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\phi(\mathbf{x}))^2\rangle_{\mathbf{x}}=\langle(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\bar{\phi}+\bar{\phi}-\phi(\mathbf{x}))^2\rangle_{\mathbf{x}}=$$
$$\langle(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\bar{\phi})^2\rangle_{\mathbf{x}}+\langle(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\bar{\phi})^2\rangle_{\mathbf{x}}-$$
$$2\langle(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r})-\bar{\phi})(\phi(\mathbf{x})-\bar{\phi})\rangle_{\mathbf{x}}=\sigma_{\mathbf{x}}^2+\sigma_{\mathbf{x+R}}^2-2\mathrm{cov}(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r}),$$
$$\phi(\mathbf{x}))=2(\sqrt{\sigma_{\mathbf{x}}^2+\sigma_{\mathbf{x+R}}^2}-\mathrm{cov}(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r}),$$
$$\phi(\mathbf{x})))=2\sigma_{\mathbf{x}}^2-2\mathrm{cov}(\phi(\mathbf{x}+\mathbf{r}),\phi(\mathbf{x}))$$

$2\sigma_{\mathbf{x}}^2$ 其实等于波像差均方根平方的二倍,在检测孔径比较大的表面时,$\mathbf{SF}=2\sigma_{\mathbf{x}}^2$。

由以上分析可知，结构函数可以反映在不同空间尺度下系统波像差的起伏情况；而光机系统常用的评价指标——斯特利尔比与结构函数也有紧密的联系。

1.2 斯特利尔比

斯特利尔比是光学系统一个重要的评价指标。它的值为点分布函数中最高点的能量与一个理想系统的点分布函数最高点的能量之比。其一般表达式如公式(2)所示：

$$\mathbf{s}=|\langle e^{i\Phi}\rangle|^2 \tag{2}$$

考虑实际的光学系统，利用光学仪器测得到的系统波像差不可能出现能量无限的情况，即一阶矩 $\mathbf{E}[\phi(\mathbf{x})]$及二阶矩 $\mathbf{E}[\phi^2(\mathbf{x})]$一定存在。

假设系统波像差概率密度函数为偶函数,那么：

$$|e^{i\langle\Phi\rangle}|^2=1$$

代入公式(2)可得：

$$\mathbf{s}=|\langle e^{i(\Phi-\langle\Phi\rangle)}\rangle|^2=\langle\cos(\Phi-\langle\Phi\rangle)\rangle^2+\langle\cos(\Phi-\langle\Phi\rangle)\rangle^2\approx$$
$$\langle 1-\frac{(\Phi-\langle\Phi\rangle)^2}{2}\rangle^2+\langle(\Phi-\langle\Phi\rangle)\rangle^2$$

根据对称性假设可得：

$$\langle\Phi-\langle\Phi\rangle\rangle=0$$

$$\mathbf{s}=\langle 1-\frac{(\Phi-\langle\Phi\rangle)^2}{2}\rangle^2=\langle e^{\frac{(\Phi-\langle\Phi\rangle)^2}{2}}\rangle^2=$$
$$e^{-\sigma_\Phi^2}=e^{-4\pi^2/\lambda^2\Phi_{\mathbf{x}}^2} \tag{3}$$

式中:σ_Φ^2 为相位均方根的平方;$\sigma_{\mathbf{x}}^2$ 为波像差均方根的平方。

从斯特利尔比的基本计算方法出发，得出其与系统波像差均方根值的关系；之后将斯特利尔比与结构函数结合起来,从变尺度的角度,对于光学的评价以及误差分配进行分析。

1.3 线性定常系统的结构函数

根据已经得到的结论 $\mathbf{SF}=2\sigma_{x}^{2}$ 重新定义公式(3)，可得：

$$s=e^{-2\pi^2/\lambda^2 SF}=e^{-2\pi^2/\lambda^2\langle(\phi(x+r)-\phi(x))^2\rangle_x} \tag{4}$$

当 r 足够大时，公式(4)与公式(3)相同，利用公式(4)，可以建立起结构函数与光学系统成像能力评价之间的关系。

对于一个线性定常系统，其光学传递函数在其设计以及评价阶段都比较容易获得；针对这种情况，文中提出的方法可以与传递函数结合起来，即由系统输入波前的结构函数得到其输出波前结构函数：

$$\mathbf{SF}_0=\langle[\varphi(x+r)-\varphi(x)]^2\rangle_x=\langle[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)\phi(x+r-k)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)\phi(x-k)]^2\rangle_x=[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)]^2\langle(\phi(x+r)-\phi(x))^2\rangle_x=H^2(e^{j0})\mathbf{SF}_i \tag{5}$$

根据现代光学理论可得系统光学传递函数为：

$$H(\omega)=\frac{\pi^2}{2\lambda^2}\int_0^{\infty}i(\alpha)J_0(\omega\alpha)\alpha d\alpha \tag{6}$$

式中：$i(\alpha)$为系统点分布函数；$J_0(\omega\alpha)$为零阶贝塞尔函数。

根据整数阶贝塞尔函数性质：

$$J_0(\omega\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(\omega\alpha\sin\theta)}d\theta$$

代入公式(6)可得：

$$H(\omega)=\frac{\pi}{4\lambda^2}\int_0^{\infty}i(\alpha)\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(\omega\alpha\sin\theta)}\alpha d\theta d\alpha$$

$$H^2(0)=\frac{\pi^4}{4\lambda^4}\left(\int_0^{\infty}i(\alpha)\alpha d\alpha\right)^2$$

代入公式(5)可得：

$$\mathbf{SF}_o=\frac{\pi^4}{4\lambda^4}\left(\int_0^{\infty}i(\alpha)\alpha d\alpha\right)^2\mathbf{SF}_i$$

$$S_o=e^{-2\pi^2/\lambda^2\mathbf{SF}_o}=e^{-2\pi^2/\lambda^2\frac{\pi^4}{2\lambda^4}\left(\int_0^{\infty}i(\alpha)\alpha d\alpha\right)^2\mathbf{SF}_i}=e^{-\frac{\pi^6}{2\lambda^6}\left(\int_0^{\infty}i(\alpha)\alpha d\alpha\right)^2\mathbf{SF}_i}$$

即通过光学系统输入波前的结构函数得到其输出波前的斯特利尔比。

2 基于结构函数的光学系统评价

2.1 结构函数的数值计算

在结构函数的实际计算中，在半径为 r 的圆上，一定是离散取点的，如图 1 所示。

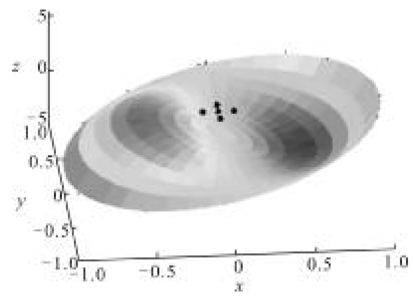

图 1 表面取样点示意图

Fig.1 Sketch of sampling

设环上取样点个数为 N，得到数据向量 $X=[x_1, x_2,\cdots,x_N]'$，其中 x_i 为高斯独立同分布。令 $T=XX'$，对于不同的取点个数，随机变量 $\gamma\sim\chi^2$(卡方分布)，利用其估计误差公式：

$$E^2=2\frac{\sum\lambda_k^2}{(\sum\lambda_k)^2}$$

式中：λ_k 为 T 的特征值。可以得到单环取样点数与估计误差的关系，归一化后如图 2 所示。

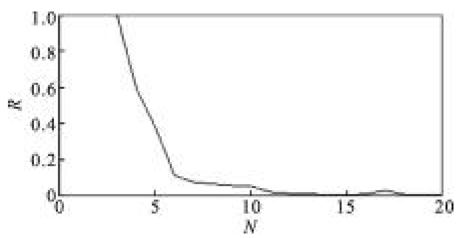

图 2 单环取样点数与估计误差关系图

Fig.2 Sketch of sampling number & estimate error

由图 2 分析可得，选择 8 点取样来求解结构函数可以很好地平衡计算成本与精度。

2.2 系统波像差的结构函数

对于光学系统的评价，本质上是对系统波像差的处理与分析，下面分别对于低阶与高阶波像差进行模拟与计算，从而得出系统的结构函数以及系统评价。

标准 Zernike 多项式是一组在单位圆上的正交基。以米级口径为例，分别将 Zernike 多项式中的 Coma、Astigmatism、Trifoil 等代入公式(4)计算，可得斯特利尔比，如图 3 所示。其中横坐标表示结构函数计算距离，单位是系统口径。

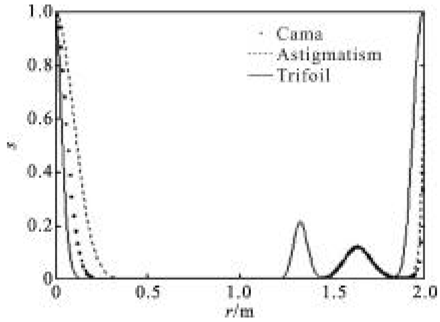

图 3 不同像差模式下的斯特利尔比

Fig.3 Strehl ratio at different modals

由图 3 可得,对于低阶波像差为主导的 1 m 口径系统,检测与评价的范围取在 0.5 m 之内较为合适。

对大气湍流畸变进行模拟,称为“功率谱反演法”。依旧以 1 m 口径为例，利用该方法得到的不同大气相干长度下的系统波像差如图 4~6 所示。

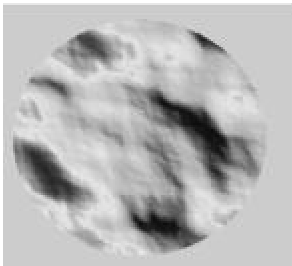

图 4 系统高阶波像差(r_0=10 mm)

Fig.4 Wave aberration at order(r_0=10 mm)

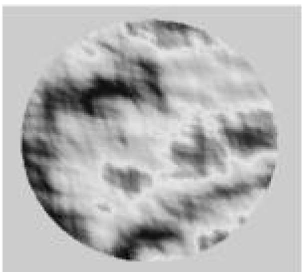

图 5 系统高阶波像差(r_0=50 mm)

Fig.5 Wave aberration at order(r_0=50 mm)

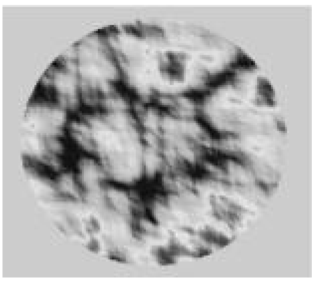

图 6 系统高阶波像差(r_0=500 mm)

Fig.6 Wave aberration at order(r_0=500 mm)

分别对不同大气相干长度下的高阶系统波像差进行八点结构函数取样分析,并利用公式(4)计算了斯特利尔比,如图 7 所示。其中横坐标表示结构函数计算半径与待检圆形孔径之比。

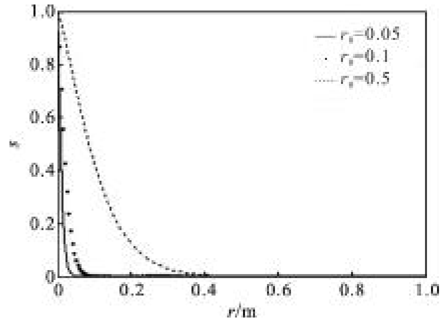

图 7 不同 r_0 下的斯特利尔比

Fig.7 Strehl ratio at different r_0

由以上分析可得,对于一般的视宁情况(如 r_0=50 mm),由于大气的影响,在 0.1 m 的范围外斯特利尔比下降非常快。这意味着反射表面没有必要采用 100 mm 以上的大型磨头进行反复研磨;同理也不必使用过大的平面镜进行检测;在光学设计时,也可以更有效地利用视宁条件好的视场。

3 r_0 的极大似然估计

由 Kolmogorov 的研究可知,大气相干长度对于系统的结构函数有着直接的影响；对光学系统的评价与误差分配都有重要的意义。

传统上，大气相干长度 r_0 的测量使用的是双点差分或者四角差分的方法。缺点是需要特殊的仪器与专门的算法。基于极大似然估计与较容易获得的系统波像差,可以得到 r_0 的估计值。

假设大气相干长度 r_0 服从指数分布，其概率密度函数为：

$$f(r_0)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda r_0} & (r_0\geqslant 0)\\ 0 & (r_0\geqslant 0)\end{cases}$$

基于文中提出的大气相干长度与斯特利尔比得关系，采用 Kolmogorov 给出的结构函数的统计解，公式(4)可写为：

$$s=e^{-6.88\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{5}{3}}}$$

反解可得：

$$r_0=r\left(\frac{\ln(s)}{-6.88}\right)^{-\frac{3}{5}}$$