

文章编号: 1000-4750(2016)08-0008-07

# 基于水平集算法的扩展比例边界有限元法研究

李建波<sup>1</sup>, 陈白斌<sup>1,2</sup>, 林 皋<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学工程抗震研究所, 辽宁, 大连 116024; 2. 中铁第四勘察设计院集团有限公司, 湖北, 武汉 430063)

**摘 要:** 扩展比例边界有限元法在裂纹贯穿单元采用 Heaviside 阶跃函数描述裂纹面两侧的不连续位移, 在裂尖则采用半解析的比例边界有限元描述奇异应力场。该方法具有无需预先知道裂尖渐进场的形式, 无需采用特殊的数值积分技术直接生成裂尖刚度阵, 对多种应力奇异类型可根据定义直接求解广义应力强度因子的特点。该文将扩展比例边界有限元法与水平集方法相结合, 进一步发展了扩展比例边界有限元法, 并将其应用于解决裂纹扩展的问题。在数值算例中, 通过编写完整的 MATLAB 分析计算程序, 求解了单边缺口的三点弯曲梁和四点剪切梁的裂纹扩展问题, 计算结果显示扩展比例边界有限元法能有效地预测裂纹轨迹和荷载-位移曲线。通过参数敏感性分析, 还可得出该方法具有较低的网格依赖性, 且对裂纹扩展步长不敏感。

**关键词:** 扩展比例边界有限元法; 线弹性断裂力学; 裂纹扩展; 应力强度因子; 水平集法

**中图分类号:** O342; O241.82 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.01.0003

## STUDY ON THE EXTENDED SCALED BOUNDARY FINITE ELEMENT METHOD BASED ON LEVEL SET ALGORITHM

LI Jian-bo<sup>1</sup>, CHEN Bai-bin<sup>1,2</sup>, LIN Gao<sup>1</sup>

(1. Earthquake Engineering Research Division, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. China Railway Siyuan Survey and Design Group Co. Ltd, Wuhan, Hubei 430063, China)

**Abstract:** In the extended scaled boundary finite element method (X-SBFEM), the Heaviside enrichment is used to represent the jump across the discontinuity surface in split element while the nonsmooth behavior around the crack tip is described by the semi-analytical SBFEM. This method does not require a priori knowledge of the asymptotic fields. It also does not require special numerical integration technique so that the stiffness of the region containing the crack tip is computed directly, while the generalized stress intensity factors of many kinds of singularities could be obtained directly from definition by the consistent formula. In this paper, the X-SBFEM is combined with the level set method so that it can be applied to solve the problem of crack propagation. During its numerical evaluation, the three-point bending specimen and the four-point shear specimen is modeled by a complete MATLAB code. The results show that the X-SBFEM is capable of predicting crack trajectories and load-displacement relations accurately. Based on the sensitivity analysis of parameters, it was found that different mesh densities and crack propagation lengths led to consistent results.

**Key words:** extended scale boundary finite element method; linear elastic fracture mechanics; crack propagation; stress intensity factors; level set method

在工程领域中, 经常发生起源于断裂或者终结于裂纹扩展的灾难性破坏事故。研究材料的断裂破坏过程, 对于提高工程设计的水平有着重要的意义。许多数值方法, 如有限元法(FEM)、扩展有限

收稿日期: 2015-01-04; 修改日期: 2015-03-10

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(51138001); 国家重大科技专项项目(2011ZX06002-10); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(DUT13LK16)

通讯作者: 陈白斌(1991-), 男, 湖南人, 博士生, 主要从事工程安全与评价研究(E-mail: cbbdlut@126.com).

作者简介: 李建波(1977-), 男, 河北人, 副教授, 博士, 主要从事核电与水工结构抗震安全评价研究(E-mail: jianboli@dlut.edu.cn);

林 皋(1929-), 男, 江西人, 教授, 博导, 中科院院士, 主要从事核电与水工结构抗震研究(E-mail: gaolin@dlut.edu.cn).

元法(XFEM)以及比例边界有限元法(SBFEM)都被应用于裂纹扩展的研究。

有限元方法在模拟复杂边界条件以及裂纹模式时具有很强的通用性和灵活性<sup>[1]</sup>。但在裂纹扩展时需要进行复杂的网格重剖分,且需引入1/4节点奇异单元以反映裂尖的奇异性。为了获得足够的计算精度,裂尖附近的细分网格是不可避免的。

Belytschko首先提出的扩展有限元法(XFEM)通过引入能描述不连续位移场和裂尖奇异性的增强函数,使单元内部可被几何和物理不连续界面穿过,无需重新剖分网格即可描述不连续面的演化<sup>[2-3]</sup>。XFEM被成功应用于裂纹扩展的前提是预先获知裂尖解析形式的渐进场,并由此构造复杂的增强函数。对于非均质材料的断裂问题,裂尖渐进场是非封闭且是十分复杂的<sup>[4]</sup>,如何去构造精确的且适合数值计算的增强函数仍有待进一步研究。除此之外,在有限元近似的基础上集入复杂的增强函数还可能会导致裂尖单元出现数值积分的困难,刚度矩阵的病态并增加额外的未知量<sup>[5]</sup>。

Wolf和Song提出的比例边界有限元方法(SBFEM)集合了有限元和边界元的优点,只需在边界上进行离散,使求解的问题在空间维数上降低一维,且不需要积分的基本解;计算结果在径向是完全精确的,在环向可以收敛于有限元意义的精确解,使得计算精度显著提高<sup>[6]</sup>;在处理断裂问题时具有很强的适应性,对于实数、复数以及对数奇异性的问题均可由统一的表达式直接根据定义求出应力强度因子<sup>[7]</sup>,而无需与路径相关的积分技术。尽管如此,SBFEM也存在着刚度矩阵是满阵,计算效率较低且裂纹扩展时仍需网格重剖分的问题。

近年来新发展起来的扩展比例边界有限元法<sup>[8]</sup>(X-SBFEM)则将XFEM和SBFEM相结合,充分利用了XFEM方便描述不连续位移场和SBFEM高精度求解应力奇异问题的优点,较好地克服了传统有限元在裂纹扩展时需要不断进行网格重构和裂尖网格加密所带来的计算困难。

本文将水平集的思想引入X-SBFEM,进一步发展了扩展比例边界有限元法,并将其应用于解决裂纹扩展的问题。

## 1 扩展比例边界有限元法的原理

X-SBFEM方法的核心通过半解析的SBFEM来代替裂尖增强函数以模拟裂纹尖端附近的非光

滑行为,被裂纹贯穿的单元则通过Heaviside函数描述不连续位移场,关键是衔接处边界条件的处理。这种方法将使得域内的单元呈现4种类型:1)不含增强节点的普通单元E0;2)部分节点被增强的混合单元E1;3)所有节点均被增强的裂纹贯穿单元E2;4)包含裂尖的SBFEM超单元E3。图1为X-SBFEM典型的网格划分和不同单元类型的分区示意图,空心方框标记的节点含广义自由度,用于构造单元内阶跃形式的位移场,空心圆用于标记SBFEM单元的节点。

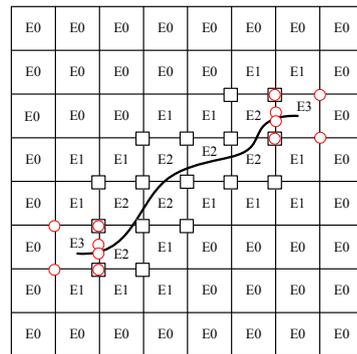


图1 X-SBFEM模型中任意形状裂纹的表征

Fig.1 The typical finite element mesh with an arbitrary crack of X-SBFEM

### 1.1 扩展有限元法原理简介

基于线弹性断裂力学,扩展有限元位移场<sup>[9]</sup>的一般形式为:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in N^{\text{lem}}} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{q}_I + \sum_{J \in N^c} N_J(\mathbf{x}) \mathcal{G}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J + \sum_{K \in N^f} N_K(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(r, \theta) \mathbf{b}_K^\alpha \quad (1)$$

式中:  $N^{\text{lem}}$ 代表普通有限元的节点;  $N^c$ 代表由于被内部裂纹贯穿而增强的节点;  $N^f$ 代表由于包含裂尖而增强的节点;  $\mathcal{G}$ 和  $B_\alpha$ 分别为用于描述裂纹面两侧不连续位移场和裂尖奇异性的增强函数;  $\mathbf{q}_I$ 为普通自由度;而  $\mathbf{a}_J$ 和  $\mathbf{b}_K^\alpha$ 分别为与  $\mathcal{G}$ 和  $B_\alpha$ 所关联的广义自由度;  $n$ 为裂尖渐进函数的数目;  $(r, \theta)$ 为裂纹尖端的局部坐标系。

### 1.2 比例边界有限元法原理简介

比例边界有限元采用的是径向-环向的坐标系(如图2所示),在环向用一维线单元离散,局部坐标为  $-1 \leq \eta \leq 1$ ,在径向则采用光滑的解析函数,局部坐标为  $0 \leq \xi \leq 1$ 。相似中心  $o$ 的选取应保证子域所有边界均对中心  $o$ 可见,特别的,对于断裂问题,相似中心  $o$ 应设在裂尖点。

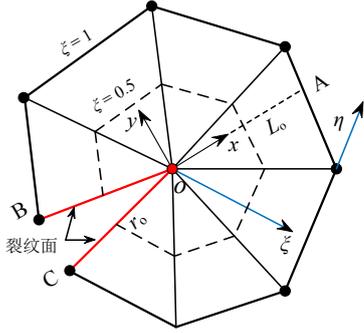


图2 裂尖超级单元

Fig. 2 The super element of crack-tip

SBFEM 给出的位移场为:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\eta)\mathbf{u}(\xi) \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{N}(\eta)$  为一维线单元的插值形函数。

根据虚功原理,可推出 SBFEM 的控制方程<sup>[10]</sup>, 在不计体力时, 其表达式为:

$$\mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi\xi} + [\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1] \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} - \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(\xi) = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}^0 \mathbf{u}(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}(\xi) |_{\xi=1} \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{P}$  为边界上的等效节点力;  $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{E}_2$  分别为 SBFEM 位移控制方程的系数矩阵。

由于式(3)为欧拉-柯西微分方程, 微分方程解的形式为:

$$\mathbf{u}(\xi) = \sum_{i=1}^n c_i \xi^{\lambda_i} \boldsymbol{\varphi}_i \quad (5)$$

将式(5)分别代入式(3)和式(4)就可将二阶偏微分方程转化为标准的线性特征值问题<sup>[10]</sup>, 即可得到特征值矩阵  $\boldsymbol{\lambda}$  和位移模态矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$ 。

在边界 ( $\xi=1$ ) 上, 式(5)变形为:

$$\mathbf{u}_b = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{c} \quad \text{或} \quad \mathbf{c} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{u}_b \quad (6)$$

将式(5)和(6)代入式(4)可得:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{u}_b = (\mathbf{E}_0 \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\Phi}^{-1} + \mathbf{E}_1^T) \mathbf{u}_b \quad (7)$$

对于均质材料的平方根奇异问题, 在 SBFEM 中只有  $\lambda_i=0.5$  的两个应力模态会引起裂尖的应力奇异, 故应力强度因子表达式为<sup>[11]</sup>:

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = \sqrt{2\pi L_0} \sum_{i=1,2} \left( c_i \begin{Bmatrix} \psi_{yy}(\eta = \eta_A) \\ \psi_{xy}(\eta = \eta_A) \end{Bmatrix} \right) \quad (8)$$

式中:  $\boldsymbol{\psi}$  为 SBFEM 的解出的应力模态;  $L_0$  为裂纹方向线与单元边界的交点和相似中心连线的距离。

### 1.3 耦合模型边界的位移协调

结合式(1)和式(2)可得扩展比例边界有限元位移场的表达形式为:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{I \in N^{\text{fem}}} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{q}_I + \\ \sum_{J \in N^c} N_J(\mathbf{x}) [H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_J)] \mathbf{a}_J \\ \sum_{K \in N^{\text{sbfem}}} N_K(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{u}_{BK}(\boldsymbol{\xi}) \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $H(\mathbf{x})$  为 Heaviside 阶跃函数, 用以模拟裂纹面两侧的不连续位移;  $N^{\text{sbfem}}$  代表裂尖 SBFEM 超单元的节点。为了保持两类单元边界上位移的协调, 需要通过转换矩阵  $\mathbf{T}$  来实现节点位移的匹配, 如图 3 和图 4 所示。

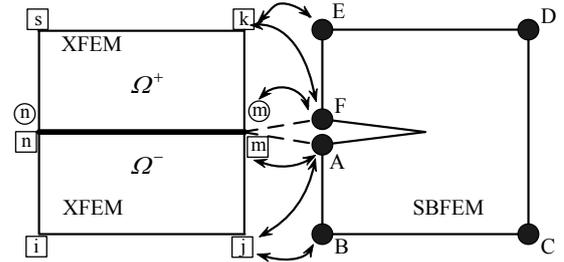


图3 裂纹面位于单元内部

Fig.3 The crack located in the element

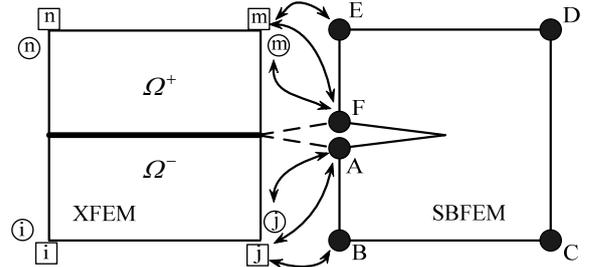


图4 裂纹面位于单元边界

Fig.4 The crack located in the boundary of the element

当裂纹面位于单元内部时:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_E \\ \mathbf{u}_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_j(\mathbf{x}_A) & N_m(\mathbf{x}_A) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ N_j(\mathbf{x}_F) & 2N_j(\mathbf{x}_F) \\ \mathbf{0} & -2N_m(\mathbf{x}_A) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ N_m(\mathbf{x}_F) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{q}_m \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} \quad (10)$$

虽然式(10)是以裂纹面交于 XFEM 单元  $j$ - $m$  边进行推导, 但当裂纹面交于单元其他边时, 只需将式(10)的下标按  $i$ - $j$ - $m$ - $n$  进行轮换即可得到类似位移转换关系。

当裂纹面位于单元边界时:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_E \\ \mathbf{u}_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & -2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_m \\ \mathbf{a}_m \\ \mathbf{q}_k \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式(10)和式(11)可简写为:

$$\mathbf{u}_{sb}^2 = T\mathbf{u}_{xf} \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{u}_{sb}^2$  和  $\mathbf{u}_{xf}$  分别为 SBFEM 单元与 XFEM 单元在共用边界上的节点位移。

随后, 将式(12)代入 SBFEM 单元的平衡方程, 并按照节点是否在共用边界上写成分块矩阵的形式, 即:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{mn}T \\ T^T\mathbf{K}_{mm} & T^T\mathbf{K}_{mn}T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{sb}^1 \\ \mathbf{u}_{xf} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_m \\ T^T\mathbf{F}_n \end{Bmatrix} \quad (13)$$

至此, 即可在标准的有限元框架内进行集成总刚并求解节点位移。

#### 1.4 水平集方法与扩展比例边界有限元法的结合

水平集方法(LSM)是一种追踪移动界面的数值方法, 它将界面的变化表示成比界面高一维的水平集曲线<sup>[12]</sup>。通过采用水平集方法描述不连续面的几何位置及其扩展过程, 使得不连续面的描述独立于有限元网格, 从而在不连续面扩展时可以不进行复杂的网格重构。

为了描述二维的裂纹问题, 需要两个水平集函数  $\psi(\mathbf{x}, t)$  和  $\phi(\mathbf{x}, t)$  分别描述裂纹面和裂纹前沿。其中,  $\psi(\mathbf{x}, t)$  为任意一点到裂纹面的最短距离,  $\phi(\mathbf{x}, t)$  为任意一点到裂纹前沿的最短距离, 二维裂纹的典型水平集描述如图5所示。

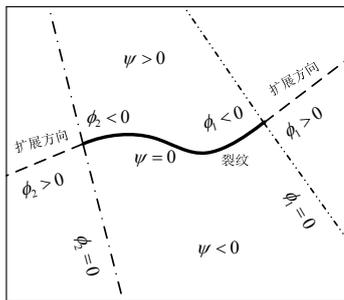


图5 二维裂纹的典型水平集函数  
Fig.5 The typical level set functions of two-dimensional crack

扩展比例边界有限元法由于继承了扩展有限元法在裂纹演变过程中不需要进行网格重剖分的优点, 可以很自然地与水平集法进行结合。裂纹扩展模拟的主要计算步骤如下:

1) 针对任意的裂纹构型, 计算模型节点的水平集函数值  $\psi$  和  $\phi$ 。

2) 由  $\psi_{\max}\psi_{\min} < 0$  且  $\phi_{\max}\phi_{\min} < 0$  搜索到包含裂尖的FEM单元, 根据计算精度的要求, 以裂尖FEM单元为中心, 向外扩出3层~5层FEM单元, 形成裂尖子域, 将子域内部所有节点标记, 而以子域的边界节点形成SBFEM超单元。

3) 由  $\phi < 0$  且  $\psi_{\max}\psi_{\min} < 0$  搜索到的节点若不被步骤2)所标记, 则用Heaviside富集函数进行增强。

4) 求解平衡方程, 由SBFEM根据定义直接求解应力强度因子  $K_I$  和  $K_{II}$ 。

5) 根据选定的裂纹扩展准则求出裂纹扩展角  $\theta$ , 结合一定的裂纹扩展步长  $\Delta a$  求出新的裂纹尖端。

6) 重复步骤1)~步骤5), 即可实现裂纹的扩展模拟。

## 2 数值算例与分析

### 2.1 单边缺口的三点弯曲梁

Pettersson<sup>[13]</sup>首先以单边缺口的三点弯曲梁为研究对象, 通过试验来研究 I 型裂纹扩展的问题。梁的尺寸、边界条件以及材料参数如图 6 所示。为了探究 X-SBFEM 算法对网格密度的依赖性, 本文选取了三种密度的网格进行了比较分析, 裂纹扩展步长  $\Delta a$  均取为 10 mm, 三种网格对应的单元长度分别为 20 mm( $\Delta a$ )、10 mm( $\Delta a$ )和 6.67 mm( $2/3\Delta a$ )。此外, 还以单元长度为 10 mm 的网格为例, 比较了不同的裂纹扩展步长 10 mm、20 mm 和 30 mm 对裂纹扩展过程的影响。

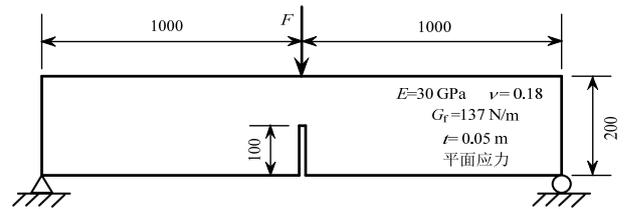


图6 单边缺口三点弯曲梁的 I 型裂纹扩展

Fig.6 Three-point bending beam for crack propagation

图 7 和图 8 显示的是基于线弹性力学(LEFM)计算得到的三点弯曲梁的荷载与加载点位移的关系曲线(Load-LPD)。本文的结果分别与 Pettersson<sup>[13]</sup>的试验结果及 Yang<sup>[14]</sup>的数值解进行了比较。通过比较可以看出, X-SBFEM 的计算结果与 Yang 的数值解十分吻合, 验证了算法的正确性, 但它们的荷载峰值都明显高于试验曲线, 这是由于 LEFM 在模拟混凝土断裂过程区的能量耗散是无能为力的, 为

了较为准确的模拟粘聚裂纹的扩展,需要在裂尖 SBFEM 超单元中插入非线性界面单元<sup>[14]</sup>来进行非线性分析。由图 7 可以看出,三种网格密度计算得到的 Load-LPD 基本重合,这说明 X-SBFEM 算法的网格依赖性是比较小的,较粗的网格也能获得精度较高的结果。图 8 反映了对于 X-SBFEM 算法,裂纹扩展步长对计算结果的影响不大。

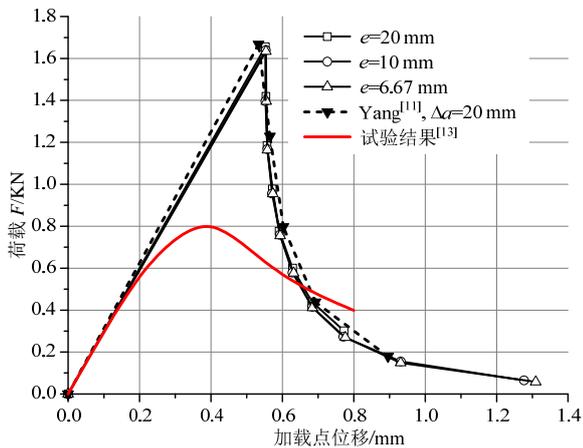


图 7 不同网格密度下的荷载-加载点位移曲线

Fig.7 Load-LPD curves with the change of mesh density

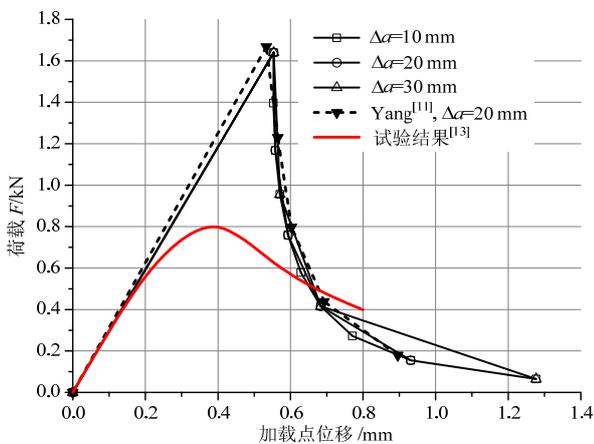


图 8 不同裂纹扩展步长下的荷载-加载点位移曲线

Fig.8 Load-LPD curves with the change of crack increment length

## 2.2 单边切口的四点剪切梁

Arrea 和 Ingraffea<sup>[15]</sup>首先对单边切口的四点剪切梁进行了试验和分析,此后,这类梁成为了用于验证复合型裂纹扩展模型有效性的基准算例。剪切梁的尺寸、边界条件以及材料参数如图 9 所示,采用最大能量释放率的理论作为断裂判据,网格尺寸取为 8 mm。本文选取了三种裂纹扩展步长  $\Delta a$  为 20 mm、30 mm 和 40 mm 用于说明扩展步长对复合型裂纹扩展过程的影响。此外,为了探究裂尖 SBFEM

超单元的大小对计算结果的影响,本文以  $\Delta a=30$  mm 为例,对裂尖 3 层、4 层及 5 层单元分别进行了计算与分析。

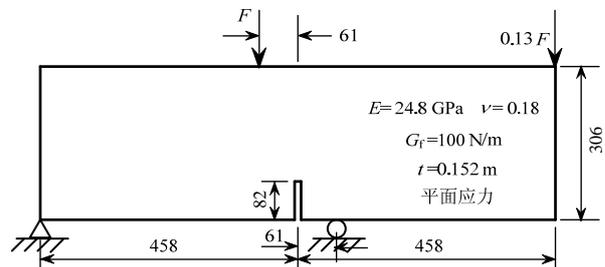


图 9 单边切口四点剪切梁复合型裂纹扩展

Fig.9 Four-point notched shear beam for crack propagation

图 10~图 13 为基于 LEFM 得到的荷载-裂口滑移位曲线(Load-CMSD)和荷载-加载点位移曲线(Load-LPD)。从图 10 和图 11 可以看出,本文的计算结果与 Yang<sup>[11]</sup>的数值解较为接近,当  $\Delta a=30$  mm 时,荷载峰值的相对误差为 1.81%,其所对应的滑移位及加载点位移的相对误差分别为 3.49% 和 3.33%,从而验证了 X-SBFEM 算法对于复合型裂纹扩展问题的适用性。对于相同的网格划分,三种裂纹扩展步长下的荷载-位移曲线较为一致,这种一致性主要归功于 SBFEM 可以高精度求解应力强度因子,这也就在一定程度上克服了传统的 XFEM 在裂纹扩展步长减小时,为了保证计算结果的一致性而需要细化网格的缺点<sup>[16]</sup>。从图 12 和图 13 可以看出,当裂尖超单元取 3 层~5 层 FEM 单元时,计算得到的荷载-位移曲线都几乎重合,说明在处理裂纹扩展问题时,只要超单元取 3 层 FEM 单元,就能获得足够的计算精度。

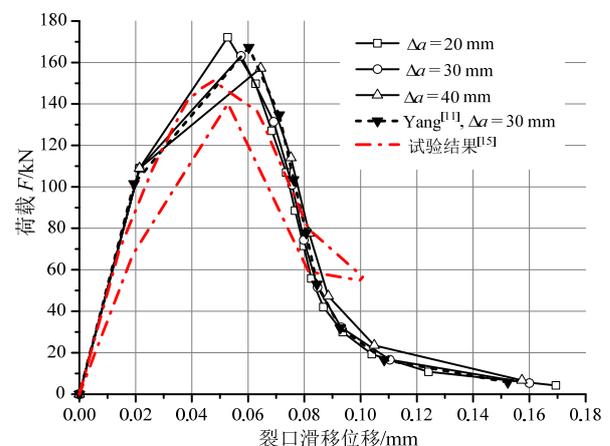


图 10 不同裂纹扩展步长下的荷载-滑移位曲线

Fig.10 Load-CMSD curves with the change of crack increment length

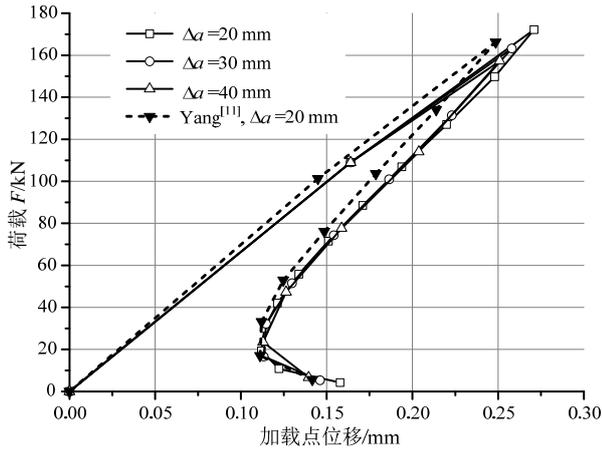


图 11 不同裂纹扩展步长下的荷载-加载点位移曲线

Fig.11 Load-LPD curves with the change of crack increment length

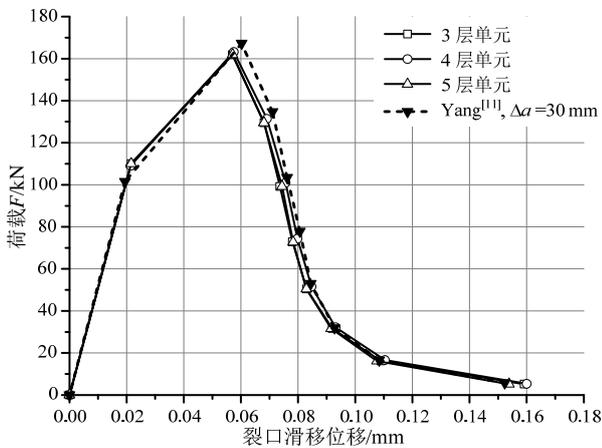


图 12 裂尖超单元的大小对荷载-滑移位移曲线的影响

Fig.12 Load-CMSD predicted by different size of super element

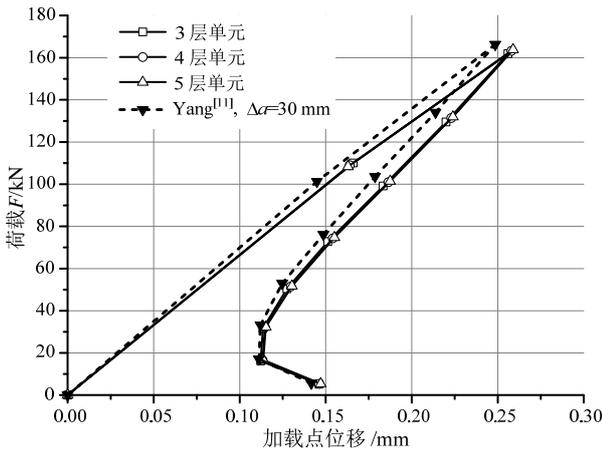
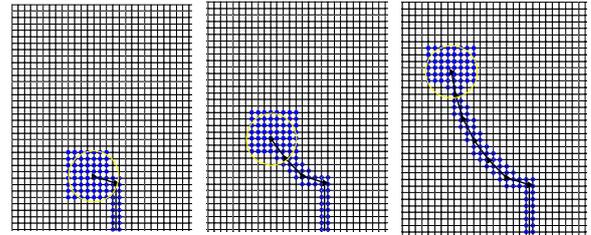


图 13 裂尖超单元的大小对荷载-加载点位移曲线的影响

Fig.13 Load-LPD predicted by different size of super element

图 14 为扩展步长 $\Delta a=30\text{ mm}$ 时,四点剪切梁的裂纹扩展过程,在每一个扩展步中,只有裂尖附近节点的水平集函数值需要更新,且裂尖超单

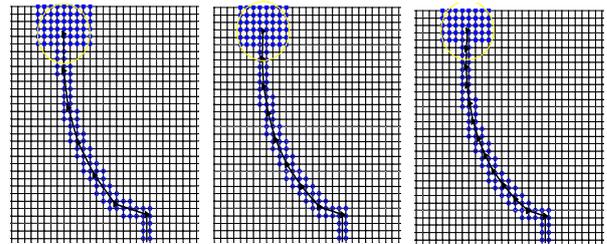
元均由潜在的 FEM 网格边界形成。由于超单元的形成只需要边界信息,且建立在潜在的 FEM 网格上,裂尖单元重建的工作量很小。图 15 为四点剪切梁的最终裂纹形态,随着裂纹扩展步长的减小,裂纹路径趋于平滑,对应同一荷载时,三种步长得到的裂纹形态一致,且与试验结果<sup>[15]</sup>较为吻合。



(a)  $F=163.2\text{ kN}$  (b)  $F=100.9\text{ kN}$  (c)  $F=32.2\text{ kN}$

图 14 四点剪切梁的裂纹扩展过程( $\Delta a=30\text{ mm}$ )

Fig.14 The crack propagation and detailed mesh for four-point shear beam ( $\Delta a=30\text{ mm}$ )



(a)  $\Delta a=40\text{ mm}$  (b)  $\Delta a=30\text{ mm}$  (c)  $\Delta a=20\text{ mm}$

图 15 四点剪切梁不同扩展步长下的最终裂纹形态

Fig.15 Final cracking paths predicted by three crack increment length for shear beam

### 3 结论

本文将 X-SBFEM 与 LSM 相结合,发展了 X-SBFEM,提升了其处理裂纹扩展问题的能力。X-SBFEM 对于裂纹贯穿单元采用 Heaviside 函数描述不连续位移场,在裂尖则形成超单元,由 SBFEM 描述奇异应力场。X-SBFEM 与传统的 XFEM 和 SBFEM 相比,具有如下特点:1) 无需预先知道裂尖渐进场的形式,对于实数、复数以及对数奇异性的问题均可直接根据定义求出应力强度因子;2) 在裂尖单元直接由 SBFEM 生成刚度阵,而无需采用特殊的数值积分技术;3) 在裂纹扩展时,通过引入水平集的思想,拓扑关系较简单,裂尖单元重建的工作量很小,且不需要增加新的节点。

通过单边缺口的三点弯曲梁和四点剪切梁的算例分析可以得到以下结论:1) 对于裂纹扩展的问题,X-SBFEM 仍可高精度的求解应力强度因子并

能准确的模拟裂纹扩展路径。2) X-SBFEM 的网格依赖性是比较低的,较粗的网格也可获得较为精确的结果。3) 裂纹扩展步长对裂纹形态影响较小,在扩展步长改变时,裂纹扩展路径及梁的荷载-位移曲线保持一致。4) 随着裂尖 SBFEM 超单元的增大,边界节点的增多,计算精度有一定的提高,但对于裂纹扩展问题,只要保证 SBFEM 的模拟范围达到从裂尖向四周延伸三层 FEM 网格就能获得较高的计算精度。

#### 参考文献:

- [1] Yang Z J, Chen J F. Finite element modelling of multiple discrete cohesive crack propagation in reinforced concrete beams [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, 72(14): 2280—97.
- [2] Belytschko T, Gracie R. On XFEM applications to dislocations and interfaces [J]. *International Journal of Plasticity*, 2007, 23(10): 1721—1738.
- [3] 张晓东, 丁勇, 任旭春. 混凝土裂纹扩展过程模拟的扩展有限元法研究[J]. *工程力学*, 2013, 30(7): 14—21.  
Zhang Xiaodong, Ding Yong, Ren Xuchun. Simulation of the concrete crack propagation process with the extend finite element method [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(7): 14—21. (in Chinese)
- [4] Sundararajan N, Song C M. Representation of singular fields without asymptotic enrichment in the extended finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, 96(13): 813—841.
- [5] Belytschko T, Gracie R, Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material model [J]. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2009, 17(4): 1—24.
- [6] 刘钧玉, 林皋, 胡志强. 裂纹面荷载作用下多裂纹应力强度因子计算[J]. *工程力学*, 2011, 28(4): 7—12.  
Liu Junyu, Lin Gao, Hu Zhiqiang. The calculation of stress intensity factors of multiple cracks under surface tractions [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(4): 7—12. (in Chinese)
- [7] Song C M, Francis T, Wei G. A definition and evaluation procedure of generalized stress intensity factors at cracks and multi-material wedges [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, 10(1): 2316—2336.
- [8] 陈白斌, 李建波, 林皋. 基于 X-SBFEM 的裂纹体非网格重剖分耦合模型研究[J]. *工程力学*, 2015, 32(3): 15—21.  
Chen Baibin, Li Jianbo, Lin Gao. Study on the coupling model of crack without remeshing based on X-SBFEM [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(3): 15—21. (in Chinese)
- [9] 茹忠亮, 朱传锐, 赵洪波. 裂纹扩展问题的改进 XFEM 算法[J]. *工程力学*, 2012, 29(7): 12—16.  
Ru Zhongliang, Zhu Chuanrui, Zhao Hongbo. An improved algorithm of XFEM for the crack propagation problems [J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(7): 12—16. (in Chinese)
- [10] Deeks A J, Wolf J P. A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics [J]. *Computational Mechanics*, 2002, 28(6): 489—504.
- [11] Yang Z J. Fully automatic modelling of mixed-mode crack propagation using scaled boundary finite element method [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, 73(12): 1711—1731.
- [12] Stolarska M, Chopp D L, Moes N, Belytschko T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51(8): 943—960.
- [13] Petersson P E. Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar materials, Report TVBM-1006 [R]. Lund: Lund Institute of Technology, 1981.
- [14] Yang Z J, Deeks A J. Modelling cohesive crack growth using a two-step finite element-scaled boundary finite element coupled method [J]. *International Journal of Fracture*. 2007, 143(4): 333—354.
- [15] Arrea M, Ingraffea A R. Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete [R]. America, State of New York: Department of Structural Engineering, Cornell University, 1982: Report No. 81-13.
- [16] Huang R, Sukumar N, Prevost J H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical applications [J]. *International Journal Solids Structure*, 2003, 40(26): 7539—7552.