

非 Kolmogorov 大气湍流对高斯阵列光束光强闪烁的影响

卢芳, 赵丹, 刘春波, 韩香娥

(西安电子科技大学 物理与光电工程学院, 陕西 西安 710071)

摘要: 基于广义惠更斯-菲涅尔原理, 采用 Rytov 方法推导了径向分布高斯阵列光束在非 Kolmogorov 湍流大气中传输时的光强闪烁指数表达式, 分析了径向半径 r_0 、光束个数 N 、广义指数 α 及传输距离 L 对轴上和离轴闪烁指数的影响。结果表明: 轴上和离轴闪烁指数随着 α 的增加均先增大后减小, 值得注意的是不同的 r_0 光束的闪烁指数达到极大值所对应的 α 略有不同, 轴上闪烁指数随着 r_0 的增大达到极大值所对应的 α 呈减小趋势, 而离轴闪烁指数随着 r_0 的增大达到极大值所对应的 α 呈增大趋势; 光轴附近各阵列光束的闪烁指数小于高斯光束的闪烁指数, 随着 p_x 的增大阵列光束闪烁指数将大于高斯光束闪烁指数。当 r_0 相同时 N 越大闪烁指数越小, 当 N 相同时闪烁指数随 r_0 的增大非单调变化, 而是存在一个极小值。

关键词: 非 Kolmogorov 湍流; 径向阵列光束; 闪烁指数; Rytov 方法

中图分类号: TN012 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201645.0711001

Influence of non-Kolmogorov atmospheric turbulence on scintillation of Gaussian array beams

Lu Fang, Zhao Dan, Liu Chunbo, Han Xiang'e

(School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: The expression for the scintillation index of radial Gaussian array beams propagation in non-Kolmogorov turbulence was derived by using the extended Huygens-Fresnel principle and Rytov method. The influences of the ring radius r_0 , beam number N , general exponent α and propagation distance L on the on-axis and off-axis scintillation index were studied. The results show that both the on-axis and off-axis scintillation index rise initially as α becomes larger, but later the scintillation reduce as α grows further. It is worth noting that beams with different r_0 reach its maximum scintillation correspond to different α . The scintillation index values of array beams are smaller than that of a Gaussian beam around the on-axis point, but with the increase of the transverse coordinate p_x the scintillation index values become larger than that of a Gaussian beam. Scintillation index decreases with the increase of N , but the dependence of scintillation on r_0 is not monotonic.

Key words: non-Kolmogorov turbulence; radial array beams; scintillation index; Rytov method

收稿日期: 2015-11-24; 修订日期: 2015-12-27

基金项目: 国家部委预研项目(62401110309); 教育部博士点基金(20110203110009); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(NSIY011401)

作者简介: 卢芳(1985-), 女, 博士生, 主要从事大气激光传输方面的工作。Email: lufang11@163.com

导师简介: 韩香娥(1962-), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事大气激光通信、小粒子散射及光电探测等方面的工作。

Email: xehan@mail.xidian.edu.cn

0 引言

激光束阵列因其在高能激光合成、空间光通信及其他激光传输工程中的潜在应用而引起人们的广泛关注。已有大量文献对不同排布方式与合成方式的阵列光束通过大气湍流时的光强分布^[1-2]、光束扩展^[3]、光强闪烁^[4-5]及空间相干性^[6]等传输特性进行了研究,目的是为了寻求合适的光束合成条件来克服或降低大气湍流效应的影响。此外,谌娟等人^[7-8]分析了多光束发射大气光通信系统的误码率特性,结果表明采用多光束发射技术可有效抑制大气湍流的影响。以上研究工作均假设大气湍流满足均匀各向同性的 Kolmogorov 统计理论,即惯性区大气折射率结构函数满足 2/3 幂律和一维湍流谱的 -5/3 幂律(三维湍流谱的 -11/3 幂律)。但是实验测量数据^[9]表明实际大气湍流与 Kolmogorov 功率谱描述的湍流存在较大的偏差,功率谱幂值随高度变化,在很多情况下偏离了 -5/3。Toselli 等人^[10]通过引入广义指数 α 和广义振幅因子来描述非 Kolmogorov 湍流功率谱,当 $\alpha=11/3$ 时非 Kolmogorov 湍流谱简化为 Kolmogorov 湍流谱。国内外学者们对几种不同单束^[11-12]或阵列光束^[13-14]通过非 Kolmogorov 湍流的传输特性展开了研究。迄今为止,阵列光束通过非 Kolmogorov 湍流大气的光强闪烁特性的研究未见报道。

文中基于广义惠更斯-菲涅尔原理和 Rytov 方法推导了径向分布阵列光束在 non-Kolmogorov 湍流大气中传输时的闪烁指数表达式,研究了基模高斯阵列光束在非 Kolmogorov 湍流大气中传输时的光强闪烁效应,得到了一些有意义的结果。

1 理论分析

在直角坐标系发射平面 $z=0$ 处,假设有 N 束相同的基模高斯光束均匀地分布在半径为 r_0 的圆上,组成一个径向分布的阵列光束,子光束束腰宽度为 w_0 ,相邻光束角间距为 $\alpha_0=2\pi/N$,如图 1 所示。在发射平面内的阵列光束光场可表示为^[14]:

$$u_0(s, 0) = \sum_{n=1}^N \exp\left[-\frac{(s-r_n)^2}{w_0^2}\right] \quad (1)$$

式中: $s=(x,y)$ 为 $z=0$ 平面内任意一点, $r_n=(r_0 \cos \alpha_n, r_0 \sin \alpha_n)$ 为第 n 束子光束的中心, $\alpha_n=n\alpha_0, (n=1,2,3,\dots,N)$ 。

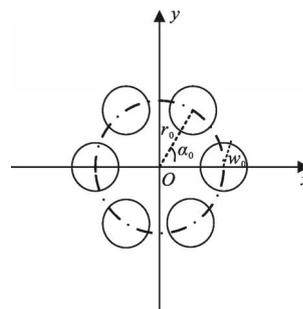


图 1 径向分布阵列光束示意图

Fig.1 Schematic diagram of the radial array beams

根据广义惠更斯-菲涅尔原理,径向分布高斯阵列光束阵列在自由空间中传输时的光场可表示为^[15]:

$$u^{FS}(p, z) = \frac{k \exp(ikz)}{i2\pi z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s, 0) \exp\left[\frac{ik}{2z}(p-s)^2\right] d^2s \quad (2)$$

式中: $p=(p_x, p_y)$ 为接收平面内任意点, z 为距离变量。

在弱湍流条件下,相干激光光束在接收平面处的闪烁指数表示为^[4-5]:

$$\sigma_i^2(p, L) = 4B_\chi(p, L) = 4\pi \text{Re} \left\{ \int_0^L dz \int_0^\infty \kappa d\kappa \int_0^{2\pi} d\theta \times [H(p, L, \kappa, \theta, z) H(p, L, -\kappa, \theta, z) + H(p, L, \kappa, \theta, z) H^*(p, L, \kappa, \theta, z)] \Phi_n(\kappa) \right\} \quad (3)$$

式中: L 为发射平面到接收平面的距离; $B_\chi(p, L)$ 为对数振幅相关函数; Re 表示取实部; H^* 为 H 的复共轭; $\Phi_n(\kappa)$ 为折射率起伏功率谱密度函数,在极坐标系内 $\kappa=\kappa \exp(i\theta)$ 表示二维空间频率; κ 为 κ 的模值; θ 为 κ 与 p 的夹角,可表示为^[15]:

$$H(p, L, \kappa, \theta, z) = \frac{k^2}{2\pi(L-z)} u^{FS}(p, L) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u^{FS}(p_1, z) \exp(ik\kappa \cos \theta p_{1x} + ik\kappa \sin \theta p_{1y}) \times \exp\left[ik(L-z) + \frac{ik(p-p_1)^2}{2(L-z)}\right] dp_{1x} dp_{1y} \quad (4)$$

则公式(3)中的 $H(p, L, \kappa, \theta, z) H(p, L, -\kappa, \theta, z)$ 和 $H(p, L, \kappa, \theta, z) H^*(p, L, \kappa, \theta, z)$ 可分别表示为:

$$H(p, L, \kappa, \theta, z) H(p, L, -\kappa, \theta, z) = -k^2 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp\left[\frac{2kr_0(\cos \alpha_n + \cos \alpha_m)p_x}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0(\sin \alpha_n + \sin \alpha_m)p_y}{(2iL + kw_0^2)}\right] \right\}^{-1} \times \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp\left[\frac{2kr_0(\cos \alpha_n + \cos \alpha_m)p_x}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0(\sin \alpha_n + \sin \alpha_m)p_y}{(2iL + kw_0^2)}\right]$$

$$\frac{2kr_0(\sin \alpha_n + \sin \alpha_m)p_y}{(2iL + kw_0^2)} \times \exp(b_1 \kappa \cos \theta + b_2 \kappa \sin \theta + b_3 \kappa^2) \quad (5)$$

$$H(\mathbf{p}, L, \kappa, \theta, z) H^*(\mathbf{p}, L, \kappa, \theta, z) =$$

$$k^2 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp \left[\frac{2kr_0 \cos \alpha_n p_x}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0 \cos \alpha_m p_x}{(-2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0 \sin \alpha_n p_y}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0 \sin \alpha_m p_y}{(-2iL + kw_0^2)} \right] \right\}^{-1} \times \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp \left[\frac{2kr_0 \cos \alpha_n p_x}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0 \cos \alpha_m p_x}{(-2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0 \sin \alpha_n p_y}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0 \sin \alpha_m p_y}{(-2iL + kw_0^2)} \right] \times \exp(b_4 \kappa \cos \theta + b_5 \kappa \sin \theta + b_6 \kappa^2) \quad (6)$$

$$\text{其中: } b_1 = -\frac{2r_0(\cos \alpha_n - \cos \alpha_m)(L-z)}{(2iL + kw_0^2)},$$

$$b_2 = -\frac{2r_0(\sin \alpha_n - \sin \alpha_m)(L-z)}{(2iL + kw_0^2)},$$

$$b_3 = \frac{(L-z)(2z - ikw_0^2)}{k(2iL + kw_0^2)},$$

$$b_4 = -\frac{2r_0 \cos \alpha_n (L-z)}{(2iL + kw_0^2)} - \frac{2r_0 \cos \alpha_m (L-z)}{(-2iL + kw_0^2)} +$$

$$\frac{4kw_0^2(L-z)}{4L^2 + k^2w_0^4} p_x,$$

$$b_5 = -\frac{2r_0 \sin \alpha_n (L-z)}{(2iL + kw_0^2)} - \frac{2r_0 \sin \alpha_m (L-z)}{(-2iL + kw_0^2)} +$$

$$\frac{4kw_0^2(L-z)}{4L^2 + k^2w_0^4} p_y,$$

$$b_6 = -\frac{2w_0^2(L-z)^2}{4L^2 + k^2w_0^4}, \quad (7)$$

考虑大气折射率起伏的 non-Kolmogorov 湍流谱^[8, 11-12]:

$$\Phi_n(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \tilde{C}_n^2 \frac{\exp[-\kappa^2/\kappa_m^2]}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}}, 0 \leq \kappa < \infty, 3 < \alpha < 4 \quad (8)$$

式中: $\kappa_0 = 2\pi/L_0$, $\kappa_m = c(\alpha)/l_0$, L_0 和 l_0 为湍流的外尺度和内尺度参量, \tilde{C}_n^2 为广义折射率结构参量, 单位为 $m^{3-\alpha}$. $c(\alpha) = [2/3\pi \cdot A(\alpha) \cdot \Gamma(5-\alpha/2)]^{1/(\alpha-5)}$, $A(\alpha) = \Gamma(\alpha-1) \cos(\alpha\pi/2)/(4\pi^2)$, $\Gamma(x)$ 为伽玛函数。当 $\alpha = 11/3$, 则 $A(\alpha) = 0.033$, $\tilde{C}_n^2 = C_n^2$, 公式(8)变成修正 von Karman 湍流谱。

将公式(5)~(8)代入公式(3)并通过积分变换公式得到径向分布高斯阵列光束在 non-Kolmogorov 大气湍流中传输时的闪烁指数表达式:

$$\sigma_s^2(\mathbf{p}, L) = 4\pi^2 A(\alpha) \tilde{C}_n^2 k^2 \times$$

$$\text{Re} \left\{ \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp \left[\frac{2kr_0(p_x \cos \alpha_n + p_y \sin \alpha_n)}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0(p_x \cos \alpha_m + p_y \sin \alpha_m)}{(-2iL + kw_0^2)} \right] \right]^{-1} \times \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{t=0}^{\infty} \exp \left[\frac{2kr_0(p_x \cos \alpha_n + p_y \sin \alpha_n)}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0(p_x \cos \alpha_m + p_y \sin \alpha_m)}{(-2iL + kw_0^2)} \right] \times \int_0^L dz_1 \frac{(b_4^2 + b_5^2)^t}{4^t t!} \kappa_0^{2t+2-\alpha} \times U(t+1; t+2-\alpha/2; (1/\kappa_m^2 - b_6)\kappa_0^2) - \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \exp \left[\frac{2kr_0 p_x (\cos \alpha_n + \cos \alpha_m)}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0(p_x \cos \alpha_m + p_y \sin \alpha_m)}{(-2iL + kw_0^2)} \right] \right]^{-1} \times \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{t=0}^{\infty} \exp \left[\frac{2kr_0 p_x (\cos \alpha_n + \cos \alpha_m)}{(2iL + kw_0^2)} + \frac{2kr_0 p_y (\sin \alpha_n + \sin \alpha_m)}{(2iL + kw_0^2)} \right] \times \int_0^L dz_1 \frac{(b_1^2 + b_2^2)^t}{4^t t!} \kappa_0^{2t+2-\alpha} \times U(t+1; t+2-\alpha/2; (1/\kappa_m^2 - b_3)\kappa_0^2) \right\} \quad (9)$$

式中: U 为第二类合流超几何函数, 在上述推导过程中应用到以下积分公式^[15]:

$$\int_0^{\infty} \kappa^{2\mu} \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\alpha/2}} d\kappa = \frac{1}{2} \kappa_0^{2\mu+1-\alpha} \times \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) U\left(\mu + \frac{1}{2}; \mu + \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}; \frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2}\right), \left(\mu > -\frac{1}{2}\right) \quad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^2 x^2 \pm qx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{s} \exp\left(\frac{q^2}{4s^2}\right), s > 0 \quad (11)$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(p \cos \theta + q \sin \theta) d\theta = 2\pi I_0(\sqrt{p^2 + q^2}) \quad (12)$$

式中: $I_0(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2t}}{t! \Gamma(t+1)}$ 为第一类修正贝塞尔函数。

以上公式推导基于弱湍流情况, 为了满足弱起伏条件, 在下一节的仿真计算中 Rytov 方差取值满足小于 $1(\sigma_R^2 = 1.23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} < 1)$ 的条件^[16], 当 $\alpha = 11/3$ 时, 公式(9)亦可退化到修正 von Karman 湍流谱下的闪烁情况。

2 数值计算与分析

在数值计算中, 选取空间光通信常用波长 $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$, 子光束束宽 $w_0 = 2 \text{ cm}$, 考虑弱湍流情况选取

$C_n^2=1\times 10^{-16} \text{ m}^{-3-\alpha}$,根据参考文献[17]对湍流尺度的测量,选取湍流外尺度 $L_0=5 \text{ m}$,湍流内尺度 $l_0=1 \text{ cm}$,其他参量取值在图中给出。下面计算分析阵列光束径向半径 r_0 、光束个数 N 、广义指数 α 及传输距离对轴上和离轴闪烁指数的影响,揭示其变化规律。

首先考虑径向半径 r_0 和不同光束个数 N 下轴上闪烁指数随广义指数 α 变化规律,如图 2 所示。轴上闪烁指数随着 α 的增大先增大后减小,并且不同径向半径 r_0 闪烁指数达到最大值时所对应的 α 值略有不同,通过寻峰得到轴上闪烁指数达到极大值所对应的 α 值如表 1 所示,随着 r_0 的增大,闪烁指数达到极大值所对应的 α 值呈减小趋势,而相同 r_0 下不同子光束个数的闪烁指数达到极大值所对应的 α 值相同;当 α 取值趋于 4 时各光束的轴上闪烁指数逐渐接近。当 r_0 相同($r_0=4 \text{ cm}$)时,由三条带实心方块符号的曲线可以看出随着 N 的增大,闪烁指数下降,当达到一定值时,继续增加光束个数对降低闪烁无效;当 N 相同时,闪烁指数随 r_0 的增大非单调变化,而是存在一个极小值,即对应最佳 r_{0m} ,当 $r_0 < r_{0m}$ 时,闪烁指数随着 r_0 的增大而减小,当 $r_0 > r_{0m}$ 时,闪烁指数随着 r_0 的增大而迅速增大,详细的数值计算如图 3 所示,这是由于随着径向半径 r_0 的继续增大,各子光束在传输光轴处不再相干所导致的。轴上闪烁指数随传输距离 L 变化曲线如图 4 所示。

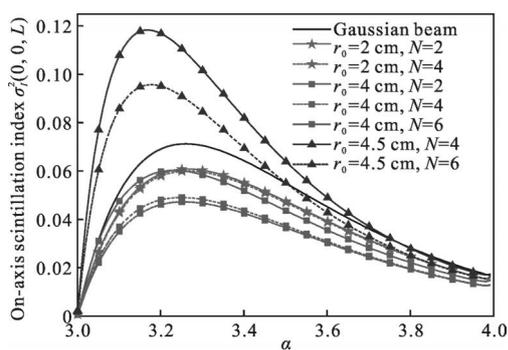


图 2 轴上闪烁指数随 α 变化曲线, $L=10 \text{ km}$

Fig.2 Variation of on-axis scintillation index versus α at $L=10 \text{ km}$

表 1 不同 r_0 和 N 下轴上闪烁指数达到极大值所对应的 α

Tab.1 Maximum of on-axis scintillation index versus α with different r_0 and N

	Gaussian beam	$r_0=2 \text{ cm}, N=2$	$r_0=2 \text{ cm}, N=4$	$r_0=4 \text{ cm}, N=4$	$r_0=4 \text{ cm}, N=6$	$r_0=4.5 \text{ cm}, N=4$	$r_0=4.5 \text{ cm}, N=6$
α	3.27	3.26	3.26	3.24	3.24	3.18	3.18
$\sigma_{I_{\max}}^2(0,L)$	0.071 3	0.060 8	0.06	0.049	0.047 2	0.118 2	0.095 7

图 5 和图 6 给出了高斯光束和几组阵列光束在非 Kolmogorov 弱湍流中传输 10 km 后的离轴闪烁指数变化曲线。图 5 为接收平面内离轴闪烁指数 $\sigma_I^2(p_x,0,L)$ 随横向坐标 p_x 变化曲线,可以看出高斯光束离轴闪烁指数随 p_x 变化不大,而阵列光束离轴闪烁指数随着 p_x 的增大而逐渐增大;在传输光轴($p_x=0$)附近高斯光束的闪烁指数大于各阵列光束的闪烁

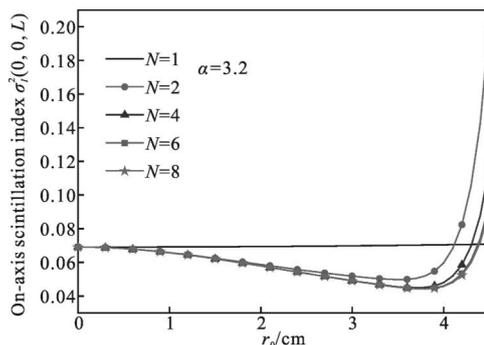
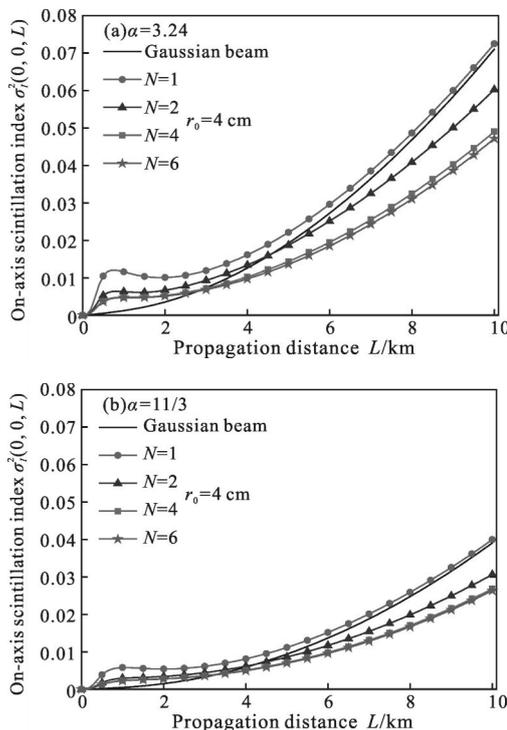


图 3 轴上闪烁指数随径向半径 r_0 变化曲线, $L=10 \text{ km}$

Fig.3 Variation of on-axis scintillation index versus r_0 at $L=10 \text{ km}$



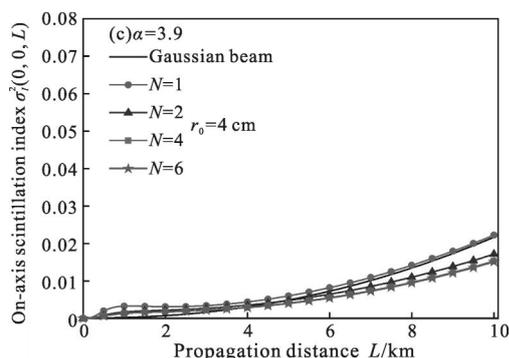


图 4 轴上闪烁指数随传输距离 L 变化曲线

Fig.4 Variation of on-axis scintillation index versus propagation distance L

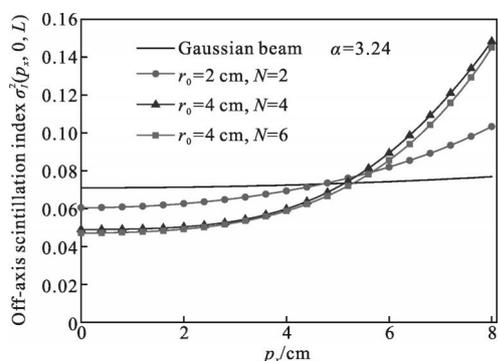


图 5 离轴闪烁指数随 p_x 变化曲线

Fig.5 Variation of off-axis scintillation index versus p_x

指数, 随着 p_x 的增大, 阵列光束闪烁指数将大于高斯光束闪烁指数。图 6 给出了接收平面内 $p_x=4$ cm 处几种光束的离轴闪烁指数随 α 变化曲线, 离轴闪烁指数随 α 增加也呈现非单调变化, 通过寻峰得到不同光束离轴闪烁指数极大值所对应的 α 值如表 2 所示, 与轴上闪烁指数不同, 离轴闪烁指数随着 r_0 的增大达到极大值所对应的 α 值呈增大趋势; 当 $\alpha < 3.48$ 时, $r_0=4$ cm, $N=6$ 的阵列光束的闪烁指数最小, $\alpha >$

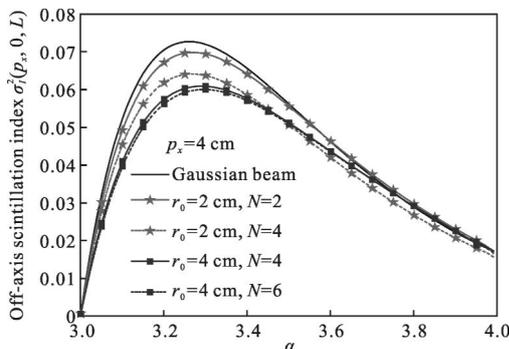


图 6 离轴闪烁指数随 α 变化曲线

Fig.6 Variation of off-axis scintillation index versus α

表 2 不同 r_0 和 N 下离轴闪烁指数达到极大值所对应的 α

Tab.2 Maximum of off-axis scintillation index versus α with different r_0 and N

	Gaussian beam	$r_0=2$ cm $N=2$	$r_0=2$ cm $N=4$	$r_0=4$ cm $N=4$	$r_0=4$ cm $N=6$
α	3.26	3.27	3.27	3.29	3.29
$\sigma_{\max}^2(0,L)$	0.072 7	0.069 8	0.064 1	0.060 9	0.059 9

3.48 时, $r_0=2$ cm, $N=4$ 的阵列光束的闪烁指数最小。

3 结论

研究了径向高斯阵列光束在非 Kolmogorov 弱湍流大气中传输时的光强闪烁特性, 分析讨论了阵列光束径向半径 r_0 、光束个数 N 及广义指数 α 对轴上和离轴闪烁指数的影响。研究表明: 广义指数 α 对阵列光束在非 Kolmogorov 湍流中闪烁指数的影响不容忽视, 不论是轴上还是离轴闪烁指数随着 α 的取值的增加均先增大后减小, 并且不同 r_0 的光束闪烁指数达到极大值所对应的 α 值略有不同, 特别指出的是轴上闪烁指数随着 r_0 的增大达到极大值所对应的 α 值呈减小趋势, 而离轴闪烁指数随着 r_0 的增大达到极大值所对应的 α 值呈增大趋势; 在选定传输距离 10 km 处光轴 ($p_x=0$) 附近各阵列光束的闪烁指数小于高斯光束的闪烁指数, 随着 p_x 的增大阵列光束闪烁指数将大于高斯光束闪烁指数; r_0 和 N 对阵列光束在非 Kolmogorov 湍流与 Kolmogorov 湍流中传输闪烁指数的影响具有一致性。文中所得到的结果为实际阵列光束通过非 Kolmogorov 湍流大气的传输、控制及对通信性能的影响分析提供理论基础和计算依据。

参考文献:

- [1] Cai Y, Chen Y, Eyyuboglu H T, et al. Propagation of laser array beams in a turbulent atmosphere [J]. *Appl Phys B*, 2007, 88(3): 467-475.
- [2] Li Changjin, Luo Yamei. Propagation properties of nonparaxial Hermite-Gaussian multiple radial array beams [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(1): 111-117. (in Chinese) 黎昌金, 罗亚梅. 非傍轴厄米-高斯光束多重径向阵列光束的传输特性[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(1): 111-117.
- [3] Ji Xiaoling. Influence of atmospheric turbulence on the

- spreading and directionality of radial Gaussian array beams[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(1): 692–698. (in Chinese)
- 季小玲. 大气湍流对径向分布高斯阵列光束扩展和方向性的影响[J]. 物理学报, 2010, 59(1): 692–698.
- [4] Eyyuboğlu H T, Baykal Y, Cai Y. Scintillations of laser array beams[J]. *Appl Phys B*, 2008, 91(2): 265–271.
- [5] Tang Hua, Wang Baoqiang, Luo Bin, et al. Scintillation optimization of radial Gaussian beam array propagating through Kolmogorov turbulence [J]. *Appl Phys B*, 2013, 111(1): 149–154.
- [6] Lu Fang, Han Xiang'e. Spatial coherence properties of GSM array beams in turbulent atmosphere [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(1): 305–309. (in Chinese)
- 卢芳, 韩香娥. 高斯-谢尔模型阵列光束在湍流大气中的空间相干性[J]. 红外与激光工程, 2015, 44(1): 305–309.
- [7] Ke Xizheng, Chen Juan, Pei Guoqiang. Multiple-beam transmission techniques for wireless laser communication[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2012, 39(7): 1–7. (in Chinese)
- 柯熙政, 谌娟, 裴国强. 无线激光通信中的多光束发射技术研究[J]. 光电工程, 2012, 39(7): 1–7.
- [8] Ke Xizheng, Chen Juan, Zhang Nan. Iterative decoding algorithm in FSO MIMO communication system[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2014, 43(8): 2631–2636. (in Chinese)
- 柯熙政, 谌娟, 张楠. FSO MIMO 系统中迭代译码算法的研究[J]. 红外与激光工程, 2014, 43(8): 2631–2636.
- [9] Papanicolaou G C, Solna K, Washburn D C. Segmentation-independent estimates of turbulence parameters [C]//SPIE, 1998, 3381: 256–267.
- [10] Toselli I, Andrews L C, Phillips R L, et al. Free space optical system performance for laser beam propagation through Non-Kolmogorov turbulence [J]. *Opt Eng*, 2008, 47(2): 1–9.
- [11] Huang Yongping, Zhao Guangpu, Xiao Xi, et al. Effective radius of curvature of spatially partially coherent beams propagating through non-Kolmogorov turbulence [J]. *Acta Phys Sin*, 2012, 61(14): 144202–1–6. (in Chinese)
- 黄永平, 赵光普, 肖希, 等. 部分空间相干光束在非 Kolmogorov 湍流大气中的有效曲率半径 [J]. 物理学报, 2012, 61(14): 144202–1–6.
- [12] Eyyuboğlu H T. Scintillation behavior of cos, cosh and annular Gaussian beams in non-Kolmogorov turbulence [J]. *Appl Phys B*, 2012, 108(2): 335–343.
- [13] Lu Lu, Ji Xiaoling, Deng Jinping, et al. A further study on the spreading and directionality of Gaussian array beams in non-Kolmogorov turbulence [J]. *Chin Phys B*, 2014, 23(6): 064209–1–8.
- [14] Lu Lu, Ji Xiaoling, Deng Jinping, et al. Influence of non-Kolmogorov turbulence on the spreading of Gaussian array beams [J]. *Acta Phys Sin*, 2014, 63(1): 014207–1–6. (in Chinese)
- 陆璐, 季小玲, 邓金平, 等. 非 Kolmogorov 大气湍流对高斯阵列光束扩展的影响 [J]. 物理学报, 2014, 63(1): 014207–1–6.
- [15] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integrals, Series and Products[M]. New York: Academic, 2000.
- [16] Andrews L C, Philips R L. Laser Propagation Through Random Media[M]. Bellingham: SPIE Press, 2005.
- [17] Mei Haiping, Wu Xiaoqing, Rao Ruizhong. Measurement of inner and outer scale of atmospheric optical turbulence in different areas [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2006, 18(3): 362–366. (in Chinese)
- 梅海平, 吴晓庆, 饶瑞中. 不同地区大气光学湍流内外尺度测量[J]. 强激光与粒子束, 2006, 18(3): 362–366.