

doi: 10.7690/bgzdh.2013.03.015

FIR 半带滤波器的简化结构及其仿真研究

任堰牛, 青小渠

(西南石油大学电气信息学院, 成都 610500)

摘要: 为简化结构并提高算法效率, 研究 FIR 半带滤波器的等效结构。论述 FIR 半带滤波器的时域和频域特性, 运用插值和抽取级联的等效性推导出 FIR 半带滤波器的简化结构, 并以一个 10 阶半带滤波器为例进行仿真研究。仿真结果表明: FIR 半带滤波器的简化结构能有效减少延时单元总数和单位时间内乘法运算的总次数, 起到提高算法效率和降低硬件资源占用率的作用。

关键词: 半带滤波器; 简化结构; 仿真

中图分类号: TP391.9 **文献标志码:** A

Simplified Structure and Simulation Research of FIR Half-Band Filter

Ren Yanniu, Qing Xiaoqu

(School of Electrical Engineering & Information, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

Abstract: The equivalent structure of FIR half-band filter is studied to simplify its structure and improve algorithm efficiency. The time-domain and frequency-domain features of FIR half-band filter are described. The simplified structure of this filter is deduced according to cascade equivalences of interpolation and decimation. A 10-order FIR half-band filter is taken for simulation example, and the results show that the simplified structure can effectively help to reduce the amount of delay-units, the frequency of multiplication in order to increase the efficiency of algorithm and to decrease the occupation of hardware.

Key words: half-band filter; simplified structure; simulation

0 引言

在多速率数字通信和多媒体技术中, 采样率提升 1 倍的上采样(up-sampling)和采样率降低一半的下采样(down-sampling)是实现采样率变化的 2 种基本方法。前者是在原采样率为 F_s 的序列中每相邻 2 个采样点之间插入 1 个零值, 形成采样率为 $2F_s$ 的新序列; 后者是在原序列中每隔 1 个采样点抽取 1 个, 形成采样率为 $F_s/2$ 的新序列。这 2 种采样率变换方法虽然简单, 但却带来了相应的频谱映像或频谱混叠问题^[1-2]。利用 FIR 半带滤波器(FIR half-band filter)的频率响应特性可很好地解决这 2 个问题, 而且有运算量少和线性相位的优点。理论上, FIR 半带滤波器可置于上采样变化后, 组合实现插值处理, 滤波器可滤除频谱映像。也可置于下采样变化前, 组合实现抽取处理, 滤波器可防止频谱混叠。由于半带滤波器的单位冲激响应呈现有趣的数学特性, 使其时域和频域特性不同于普通滤波器, 为简化其结构和提升算法效率提供了基础; 因此, 笔者对其进行研究。

1 FIR 半带滤波器的时域和频域特性

1.1 时域特性

如果 FIR 半带滤波器的单位冲激响应是序列

$h(n)$, 如图 1 所示, 则 $h(n)$ 的基本时域特性^[3]有:

1) 序列 $h(n)$ 的长度 N 可表示为 $N=4M+3$, M 是非负整数;

2) $h(2i)=h(N-1-2i)$, $0 \leq i \leq M$;

3) $h(2i+1)=h[N-1-2i+1]=0$, $0 \leq i < M$, $h(2M+1)=0.5$ 。

$h(n)$ 具有偶对称性, 表明 FIR 半带滤波器具有线性相位特性^[2], 与同阶的普通 FIR 滤波器相比较, 由于 $h(n)$ 序列有近一半为零值, 实现滤波器所需的乘法运算也几乎减少一半。

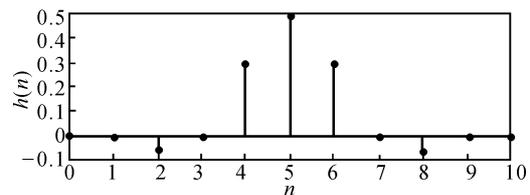


图 1 FIR 半带滤波器的冲激响应

1.2 频域特性

FIR 半带滤波器的传递函数如下:

$$H(z) = h(2M+1)z^{-(2M+1)} + \sum_{i=0}^M h(2i)[z^{-2i} + z^{-(N-1-2i)}] = \frac{1}{2}z^{-(2M+1)} + \sum_{i=0}^M h(2i)(z^{-2i} + z^{-(4M+2-2i)}) = z^{-(2M+1)} \left[\frac{1}{2} + \sum_{i=0}^M h(2i)(z^{2M+1-2i} + z^{-(2M+1-2i)}) \right] \quad (1)$$

收稿日期: 2013-12-28; 修回日期: 2013-03-04

作者简介: 任堰牛(1972—), 男, 四川人, 硕士, 讲师, 从事控制工程和信息处理研究。

FIR 半带滤波器的频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(2M+1)\omega} \left\{ \frac{1}{2} + 2 \sum_{i=0}^M h(2i) \cos[(2M+1-2i)\omega] \right\} = e^{-j(2M+1)\omega} H_0(e^{j\omega}) \quad (2)$$

式 (2) 中的 $H_0(e^{j\omega})$ 是一个实函数, 称为零相位频率响应函数 (Zero-Phase Response), 可证得:

$$H_0(e^{j\omega}) + H_0(e^{j\pi-\omega}) = 1 \quad (3)$$

式 (3) 表明通带和阻带关于 $\pi/2$ 对称, 如图 2 所示, 半带滤波器名称就源于此。

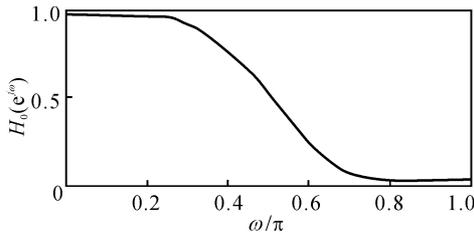


图 2 FIR 半带滤波器的幅频响应

设计 FIR 半带滤波器的传递函数的理论方法包括通用的窗函数法、等纹波法和其他巧妙方法^[3-5]。利用 Matlab 函数 firhalfband, 可方便地计算出所需 FIR 半带滤波器的系数。

2 FIR 半带滤波器在插值和抽取中的作用

FIR 半带滤波器在插值中的作用可用图 3 来说明, 经上采样变换, 在序列 $u(n)$ 相邻采样点间插入零值, 得到采样率加倍的序列 $v(n)$, 再经过 FIR 半带滤波器 $2H(z)$, 输出序列 $w(n)$, 则有:

$$v(n) = \begin{cases} u(n/2), & (n=0, 2, \dots, 2i, \dots) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$w(n) = 2 \sum_{k=0}^n v(k)h(n-k) \quad (5)$$

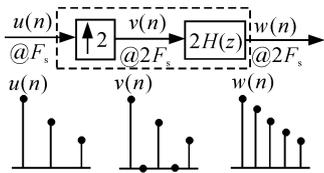


图 3 FIR 半带滤波器与上采样的组合

根据前面所述的 $h(n)$ 基本时域特性的第 3 条, 可推导出:

$$\begin{aligned} w(2M+1) &= v(0), w(2M+3) = v(2), \dots \\ w(2M+2k+1) &= v(2k) \end{aligned} \quad (6)$$

这表明序列 $v(n)$ 中偶数序号的采样值经过延时 $2M+1$ 个采样间隔 ($@2F_s$) 出现在 $w(n)$ 序列中, 而 $v(n)$ 中奇数序号的零值全都要得到插值处理。

FIR 半带插值滤波器的滤波作用可用图 4(a)来说明, 经过 2 倍上采样变化, $v(n)$ 的频谱 $|V(e^{j\omega})|$ 在

$[0, 2\pi]$ 区间内会多出 1 个 $u(n)$ 的频谱 $|U(e^{j\omega})|$ 的映像, 如图 4(a) 中的阴影区。只要 $H(z)$ 设计合理, 利用 FIR 半带滤波器通带和阻带关于 $\pi/2$ 对称的特性, 这个映像就会被滤除。

在如图 5 所示的抽取处理中, 如果假设 $v(n) = u(n)$, 也即不先经过 $H(z)$ 的防混叠滤波, $u(n)$ 直接进行下采样变化, 那么最后输出序列 $w(n)$ 的频谱 $|W(e^{j\omega})|$ 在 $[0, 2\pi]$ 区间内可能出现频谱混叠而失真, 如图 4(b) 所示的虚线所围阴影。为此 FIR 半带滤波器应该置于下采样变化前, 可限制序列 $v(n)$ 的频谱 $|V(e^{j\omega})|$ 在 $[0, \pi/2]$ 内, 下采样变化后的频谱 $|W(e^{j\omega})|$ 也不会混叠, 如图 4(b) 中 $|W(e^{j\omega})|$ 的实线频谱。

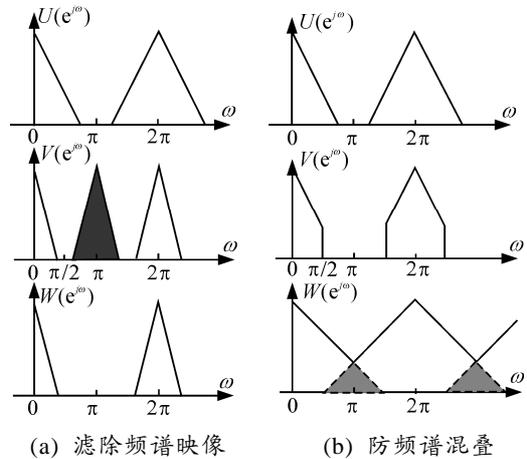


图 4 FIR 半带滤波器在插值和抽取中的滤波效果

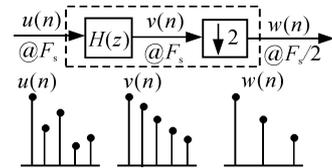


图 5 FIR 半带滤波器与下采样的组合

3 FIR 半带滤波器的简化结构

式 (1) 中, 令

$$G(z^2) = \sum_{i=0}^M h(2i)[z^{-2i} + z^{-(4M+2-2i)}] \quad (7)$$

则

$$H(z) = \frac{1}{2} z^{-(2M+1)} + G(z^2) \quad (8)$$

$$G(z) = \sum_{i=0}^M h(2i)[z^{-i} + z^{-(2M+1-i)}] \quad (9)$$

由式 (7) 和 (8) 可以看出, 实现 $H(z)$ 的滤波器结构最多需要 $4M+2$ 个延时单元, 由于 FIR 半带滤波器系数的特性, 在实际插值和抽取处理系统中其结构是可以简化的, 而且简化后滤波器在采样率变化前后的位置也会发生交换。基本方法就是运用如

图 6 所示的插值级联和抽取级联的等效性^[1]。

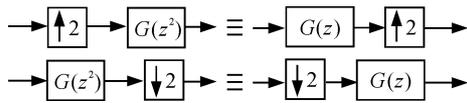


图 6 插值和抽取的等效级联

在插值处理中 FIR 半带滤波器的结构简化推导可用图 7 说明。由式 (9) 可以看出, 实现图 7 中 $G(z)$ 的结构需要 $2M+1$ 个延时单元, 再加上实现环节 z^{-M} 和 z^{-1} 所需的 $M+1$ 个延时单元, 等效的新结构整体最多需要 $3M+2$ 个延时单元。如果 $G(z)$ 用 FIR 横截型结构来实现^[1], 那么环节 z^{-M} 可共用 $G(z)$ 结构中的 M 个延时单元而实现, 使得延时单元总数进一步减为 $2M+2$ 。虚线框的功能可由一个开关的切换来实现, 这将在后面举例讨论。等效变换后乘法运算是在较低的采样率下进行的, 单位时间内乘法运算的总次数可有效地减少, 等效变换前后对比如表 1 所示。乘 2 或除以 2 的运算在数字电路中常通过移位实现, 故这 2 种运算未计入表 1 和表 2。

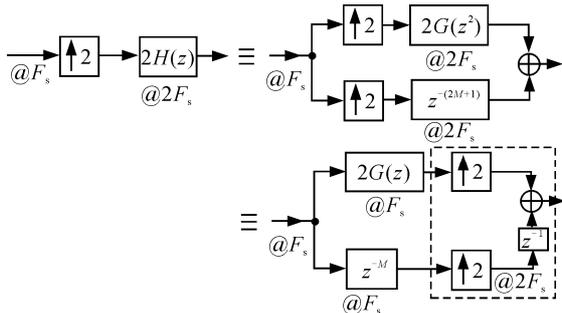


图 7 FIR 半带插值滤波器结构的等效简化

表 1 插值滤波器结构的等效变换前后对比

等效变换前后	延时单元总数	每秒乘法运算总次数
等效变换前	$4M+2$	$2(M+1)F_s$
等效横截型	$2M+2$	$(M+1)F_s$
等效转置型	$3M+2$	$(M+1)F_s$

FIR 半带滤波器在抽取中的等效简化如图 8 所示, $G(z)$ 一般采用转置型结构^[1], 既能节省延时单元又具有流水线 (pipeline) 结构的优点, 等效变换前后对比如表 2 所示。

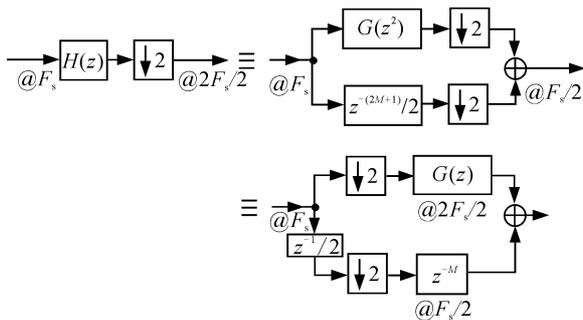


图 8 FIR 半带抽取滤波器结构的等效简化

表 2 抽取滤波器结构的等效变换前后对比

等效变换前后	延时单元总数	每秒乘法运算总次数
等效变换前	$4M+2$	$(M+1)F_s$
等效转置型	$2M+2$	$(M+1)F_s/2$

4 设计举例及仿真

以设计一个归一化通带频宽为 0.15, 通带等效纹波为 1×10^{-4} 的 FIR 半带滤波器为例。用 Matlab 函数 firhalfband 可以计算出如下数据:

$$M=2, N=4M+3=11$$

$$h(0)=h(10)=0.0078, h(2)=h(8)=-0.0539,$$

$$h(4)=h(6)=0.2962, h(5)=0.5,$$

$$h(1)=h(3)=h(7)=h(9)=0.$$

$$G(z)=h(0)(1+z^{-5})+h(2)(z^{-1}+z^{-4})+h(4)(z^{-2}+z^{-3})$$

遵循图 7 和图 8 所示的等效变化规律, 设计这个 10 阶 FIR 半带滤波器的简化结构, 如图 9~图 11。

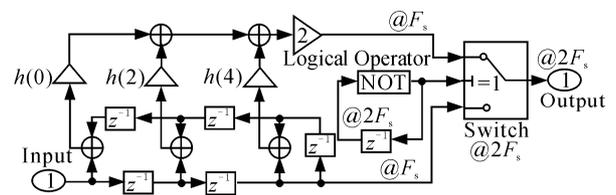


图 9 10 阶 FIR 半带插值滤波器的横截型结构

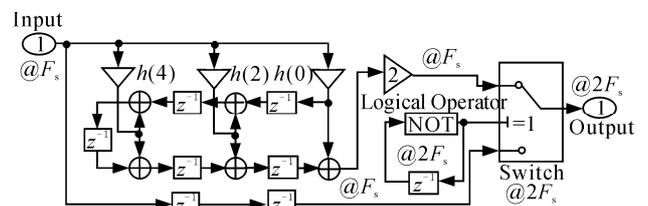


图 10 10 阶 FIR 半带插值滤波器的转置型结构

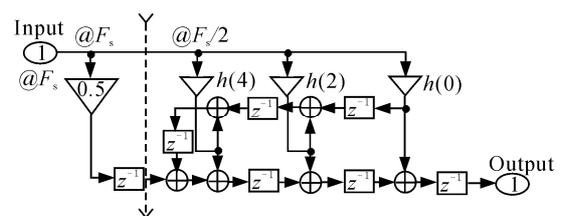


图 11 10 阶 FIR 半带抽取滤波器的转置型结构

图 9 中的结构是横截型, 最末端的延时单元是一个 1 bit 状态存储器, 以 $2F_s$ 速率变化状态, 切换 Switch (可视为数据选择器) 的接通位置, 图 7 的虚框可由这 2 个器件来实现。图 9 中其余延时单元都以 F_s 为工作频率。当滤波器的阶数或工作频率很高, 过多的加法可能使得运算数据不稳定时, 可采用如图 10 所示的转置结构, 这会一定程度上增加延时单元的需求, 另一种以时间换空间的结构可参考文献 [6] 和文献 [7]。

图 11 中的结构是转置型, 只有输入端的延时

单元工作频率为 F_s ，其余延时单元都以 $F_s/2$ 为工作频率。输出端的延时单元并非必需，只是为了实现全流水线结构而额外增加的。

用仿真工具 Matlab Simulink 将图 9 和图 11 所示的滤波器分别封装并命名为 HB2Up Filter 和 HB2Down Filter 子系统，再将这 2 个子系统级联在一起做仿真，如图 12 所示。输入正弦激励 $x(n)$ ，其幅度为 0.5，频率 f 为 0.062 5 Hz，采样周期为 1 s。当仿真时间 t 位于 0~409 5 s 内，半带插值滤波器 HB2Up Filter 和抽取滤波器 HB2Down Filter 分别输出 $u(n)$ 和 $d(n)$ 。

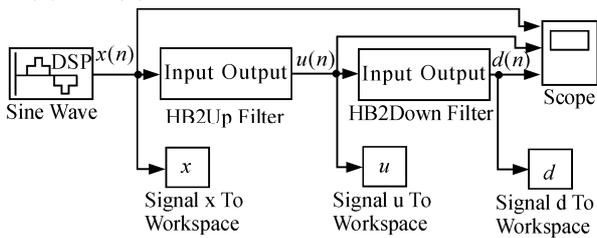


图 12 系统仿真

仿真波形如图 13 所示， $u(n)$ 相对 $x(n)$ 有延迟的插值处理，采样周期为 0.5 s。 $d(n)$ 相对 $u(n)$ 有延迟的抽取处理，采样周期为 1 s。

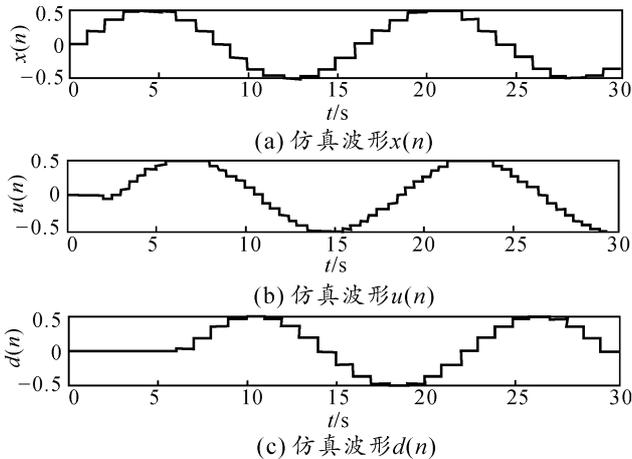


图 13 仿真波形

运行如下 Matlab 程序，可绘制 3 个序列的单边振幅谱，如图 14 所示。

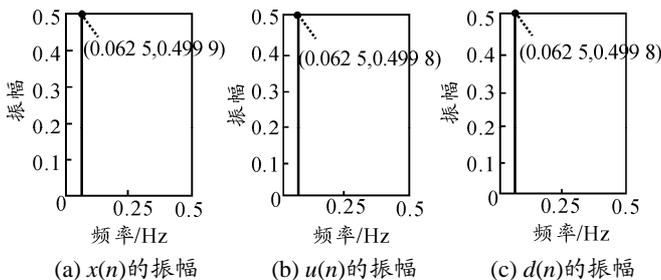


图 14 仿真信号的单边振幅谱

```
subplot(1,3,1);
plotAmplitude('x', x, 1, 0.15)
```

```
subplot(1,3,2);
plotAmplitude('u', u, 2, 0.15) %u(n)的采样率是 2 Hz
subplot(1,3,3);
plotAmplitude('d', d, 1, 0.15)
```

```
function plotAmplitude(name, x, fs, fm)
% Plot Single-Sided Amplitude Spectrum
% name - signal name      x - signal analysed
% fs - sample frequency   fm - frequency band limited
if fm > fs/2
    fprintf('fm should not exceed fs/2! \n');
    fm = fs/2;
end
L = length(x); Nfft = 2^nextpow2(L);
df = fs / Nfft; M = round(fm/df);
f = (0:M-1) * df;
peak_x = 2 * abs(fft(x,Nfft)) / L;
peak_x(1) = peak_x(1) / 2;
plot(f, peak_x(1:M));
title(name);
xlabel('f/rm/Hz')
ylabel('Amplitude')
```

从单边振幅谱可以看出，经插值处理得到的序列 $u(n)$ 和经抽取处理得到的序列 $d(n)$ ，都完好地保持了原始序列 $x(n)$ 的频谱特性。

5 结束语

FIR 半带滤波器的简化结构可减少所需的延时单元总数以及每秒乘法运算的总次数，起到提升算法效率和降低硬件资源占用率的作用。在 2^k 因子的变采样率系统中，如果简化结构通过级联组合起来，那么这种作用将更加显著。

参考文献:

- [1] Sanjit K. Mitra. Digital signal processing: a computer-based approach[M]. 2nd ed. McGraw-Hill, 2001: 660-702, 364-365.
- [2] 胡广书. 数字信号处理: 理论、算法及实现[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2003: 221-223,410-415.
- [3] Vaidyanathan P P. Multirate Systems and Filter Banks[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993: 153-156.
- [4] Vaidyanathan P P, Truong Q. Nguyen. Eigenfilters: A new approach to least-squares FIR filter design and applications including Nyquist filters[J]. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 1987, 34(1): 11-23.
- [5] Vaidyanathan P P, Truong Q. Nguyen. A 'trick' for the design of FIR half-band filters[J]. Circuits and Systems, IEEE Transactions on, 1987, 34(3): 297-300.
- [6] 何健标, 王宏远, 郭跃, 等. 一种基于 FPGA 的 FIR 滤波器实现结构[J]. 微电子学与计算机, 2008, 25(3): 47-50.
- [7] 沈志, 王宏远. 基于半带滤波器的插值结构 FPGA 优化实现[J]. 微电子学与计算机, 2011, 28(2): 15-19.