# 华北水利水电学院 2007 年硕士学位研究生招生命题考试

高等代数试题

特别声明：1 考试时间：180 分钟（3 小时）；满分 150 分.

2 答案全部答在答题纸上，写在试卷上无效.

3 下文中出现的 $P$ 表示一般数域； $R$ 表示实数域，$C$ 表示复数域.

4 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$， $A^*, A^T$ 分别表示矩阵 $A$ 的秩、伴随矩阵、转置矩阵.

**一 选择题（每题 3 分，共 21 分；每题只有一个正确答案）**

**1**、下列命题正确的是________________________.

A） $D_k(\lambda)$ 是 $\lambda$ 矩阵 $A(\lambda)$ 的 $k$ 阶行列式因子，则 $D_k^2(\lambda) \mid D_{k+1}(\lambda)D_{k-1}(\lambda)$

B） 整系数多项式 $f(x)$ 没有有理根，则 $f(x)$ 在有理数域上一定不可约

C） 镜面反射是第一类正交变换，而旋转是第二类正交变换

D） 两个同阶方阵相似的充分必要条件是它们的不变因子都是一次的

2、已知 $n$ 阶矩阵 $A,B$ 的秩相等，则 $A,B$ 一定 ____________ .

A） 相似　B） 合同　C） 等价　D） 不相似、不合同、不等价

3、矩阵 $A$ 实对称，且对应特征值 $\lambda$ 的特征向量为 $\alpha$， 矩阵 $P$ 可逆，则 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量为 ______________.

A) $P^{-1}\alpha$　B) $P^T\alpha$　C) $P\alpha$　D) $(P^{-1})^T\alpha$

**4**、设非零矩阵 $A$ 满足 $AA^*=0 \quad (A^*\neq 0)$，则 $R(A^*)=$____________ .

A） 1　B）2　C） $n-1$　D）0

**5**、以下是关于正定矩阵的四个命题：

① 如果 $A$，$B$ 正定，则 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 一定正定； ② 如果 $R(A_{m\times n})=n$，则 $A^TA$ 一定正定；

③ 如果 $A$，$B$ 正定，则 $A+B$ 一定正定； ④ 实矩阵 $A$ 的特征值全大于零，则 $A$ 一定正定.

那么在以上四个命题中正确的命题有______个.

A） 1　B） 2　C） 3　D） 4

**6**、设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足下列条件：

① $A$ 是实欧氏空间上的度量矩阵；② $f(\lambda)=|\lambda E-A|$，$(f(\lambda),f'(\lambda))=1$；③ $A^2=E$.

在以上三个命题中，能保证矩阵 $A$ 可对角化的命题有________个.

A） 0　　B） 1　　C） 2　　D） 3

**7**、设 $n$ 阶矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_p$ 满足 $A_1A_2\cdots A_p=0$.则 $R(A_1A_2\cdots A_p)$ ____________ .

A） $\le(p-1)n$　B）$\ge(p-1)n$　C）$\le pn$　D）$\ge pn$

**二　填空题（每题 3 分，共 21 分）**

**8**、已知 $A_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示行列式 $D=\begin{vmatrix}1&3&5&\cdots&2n-1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\&&\cdots\cdots\cdots&&\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$ 的代数余子式，则

$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=$__________.

**9**、互换可逆矩阵 $A$ 的第 $i,j$ 行得到矩阵 $B$，则 $AB^{-1}=$ ________________ .

10、 已知 $f(x)=x^8-4x^5+4x^3-1$，则 1 是 $f(x)$ 的________重实根.

**11**、$n$ 阶矩阵 $A$，$B$ 满足 $|A|=2,|B|=-3$,则 $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=$________ .

12、已知 $A=\begin{pmatrix}1&&\\&\varpi&\\&&\varpi^2\end{pmatrix},\varpi^3=1,V=\{f(A)\mid f(x)\in R[x]\}$ 关于矩阵的加法和数乘构成线性空间，则 $\dim V=$_____________.

13、已知 $\begin{vmatrix}x&1&2&3\\1&x&2&3\\1&2&x&3\\1&2&3&x\end{vmatrix}=0,$ 则 $x=$ ________.

14、设 $A_{ij}$ 是三阶非零矩阵 $A$ 的行列式 $|A|$ 的代数余子式，且 $a_{ij}=A_{ij}$. 则 $|A|=$________ .

**三 解答题**（本题共 11 小题，满分 108 分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤）

**15、**（**本题满分 9 分**）设 $x_1,x_2,x_3$ 是定义于数域 $C$ 上的线性空间 $V$ 的三个线性无关向量.

（1） 证明 $x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1$ 线性无关；

（2）如何将这种情况推广到 $V$ 中 $m$ 个向量的情形？

**16、**（**本题满分 10 分**）设 $f(x),g(x)$ 是非零多项式，$m$ 是正整数.证明

$$g^m(x)\mid f^m(x)\Leftrightarrow g(x)\mid f(x).$$

**17、**（**本题满分 11 分**） 设 $A=\begin{pmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots\cdots & 1 \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & n \end{pmatrix}(n>1)$.求 $A$ 的特征值及 $A^{-1}$.

**18、**（**本题满分 8 分**）证明 $n$ 阶实对称矩阵 $A$ 满足 $\lim\limits_{m\to\infty}A^m=0$ 的充分必要条件是 $\max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}<1$，$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 $A$ 的特征值.

**19、**（**本题满分 11 分**）设矩阵 $A$ 为 $n$ 阶复矩阵，其特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)^n$ .证明对任意自然数 $k$， $A^k$ 与 $A$ 相似.

**20、**（**本题满分 12 分**）设 $R^{2\times 2}$ 两个子空间 $W_1=\{A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\Big|\ x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$，$W_2=L(B_1,B_2),\ B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。求 $W_1+W_2$, $W_1\cap W_2$ 的维数和一组基.

**21、**（**本题满分 10 分**）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是四维列向量， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，$B=(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_1+a\alpha_2+\alpha_3)$.方程组 $Bx=\alpha_4$ 有无穷多解。（1）求参数 $a$；（2）求该方程组的通解.

**22、**（**本题满分 10 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 的秩为 $n$ .证明在 $R^n$ 中，存在维数为

$\dfrac{n-|s|}{2}$的子空间$V_1$，使对任意的$x \in V_1$都有 $f(x)=0$, 其中$s$为二次型的符号差.

**23、（本题满分 9 分）**计算$n$阶行列式的值：$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

**24、 (本题满分 10 分)** 设$T$是$n$维欧氏空间$V$的线性变换，它对$V$的一组基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，满足$(T\varepsilon_{i,}, T\varepsilon_i) = (\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$.问$T$是否为正交变换？若是，请证明.若不是，请举例说明.

**25 、（ 本 题 满 分 8 分 ）** 已 知 $V_1 = \{(a,a,a) \mid a \in P\}$, $V_2 = \{(0,x,y) \mid x, y \in P\}$ . 证 明 $P^3 = V_1 \oplus V_2$.