

# 2016 年硕士研究生入学考试初试试题

科目代码: 701 科目名称: 数学分析

注: (1) 本试题共 1 页。

(2) 请按题目顺序在标准答题纸上作答, 答在题签或草稿纸上一律无效。

一、(10分) 设  $x_n = \sum_{i=1}^n [\sqrt{1 + \frac{i}{n^2}} - 1]$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

二、(10分) 设  $f'''(0) = 3$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(6x) - 36f(x)}{x^3}$

三、(10分) 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  连续, 在  $(0,1)$  可导, 证明存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f(1-\xi)f'(\xi) = f(\xi)f'(1-\xi)$

四、(10分) 求  $f(x) = xe^{-x}$  的极值。

五、(10分) 计算  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

六 (10分) 设  $D$  由  $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$  确定, 计算  $\iint_D x dx dy$

七 (10分) 求  $z = x^8 + y^8$  在约束条件  $x + y = 2$  下的最小值。

八、(10分) 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  的和。

九 (10分) 设  $z = f(xy, \frac{x}{y})$ , 其中  $f$  有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  与  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

十 (15分) 利用 Stokes 公式计算  $\int_L (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2) dz$ , 其中  $L$  为平面  $x + y + z = 1$  被三个坐标平面所截的三角形的边界, 从  $x$  轴正向看去, 逆时针方向。

十一 (15分) 求出  $z = z(x, y)$  的表达式, 使得其全微分为

$$dz = (2x \cos y + y^2 \cos x) dx + (2y \sin x - x^2 \sin y) dy$$

十二 (15分) 证明  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛, 含参变量反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$  关于  $\alpha$  在  $[0, +\infty)$  一致收敛。

十三 (15分) 设  $z = f(x, y)$  为定义在  $\mathbf{R}^2$  上的实值函数, 证明  $f$  在  $\mathbf{R}^2$  上连续的充分必要条件是: 对于  $\mathbf{R}^2$  上的任意开集  $O$ , 其原像  $f^{-1}(O) = \{(x, y) | f(x, y) \in O\}$  为  $\mathbf{R}^2$  上的开集。