中 山 大 学

2016年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：673

科目名称：数学分析与高等代数

考试时间：2015年12月27日 上午

考生须知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

一、数学分析（共150分）

1.（15分）求极限 $\lim\limits_{y\to\infty}(\dfrac{2y+3}{2y+1})^{y+1}$.

2.（15分）设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 确定，求由 $u=f(x,y,z)$ 和 $z=z(x,y)$ 所确定的隐函数 $u=g(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$，并求全微分 $\mathrm{d}u$.

3.（15分）求函数 $z=2x^2+y^2$ 在点 P（1,1）处的梯度以及沿梯度方向的方向导数.

4.（15分）设计一个容量为32立方米的长方形开口水箱，问水箱的长，宽和高各等于多少米时，其表面积最小？

5.（15分）将 $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\dfrac{e^x-1}{x})$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛域.

6.（15分）已知函数 $f(x)=\int_0^{-x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t^4}\mathrm{d}t$，试讨论：

（1）该函数的奇偶性（5分）;
（2）该函数的单调性（5分）;
（3）该函数的凹凸性和拐点（5分）.

7.（15分）求抛物面 $az=x^2+y^2$ 及圆锥面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$（$a>0$）所围成的立体的体积.

8.（15分）求曲面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面的方程.

9.（15分）计算 $\oint\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 是 $x^2+y^2=a^2, y=x, y=0$ 所围成的第三象限的扇形的整个边界.

10.（15分）试确定 A,B,C 的值，使得 $\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

考试完毕，试题随答题纸一起交回。

二、高等代数（共 150 分）

1. (15 分) 设四阶行列式 $D=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ b & b & c & a \\ a & b & d & c \end{pmatrix}$，$D$ 的 (i, j) 元的代数余子式记为 A_{ij}，求

$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$.

2. (15 分) 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

3. (15 分)设矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}B+2X$（A^* 为 A 的伴随矩阵)，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

求矩阵 X.

4. (15 分) 函数集合

$$V_3=\{\alpha=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x \mid a_2,a_1,a_0\in R\}$$

对于函数的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一个基

$$\alpha_1=x^2e^x,\quad \alpha_2=xe^x,\quad \alpha_3=e^x,$$

求微分运算 D 在这个基下的矩阵.

5. (15 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，证明 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系.

6. (15 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.
（1）求参数 a 以及此二次型对应矩阵的所有特征值;
（2）指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

7. (20 分) 设 3 阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1$；对应的特征向量依次为

$p_1=(0, 1, 1)^T$，$p_2=(1, 1, 1)^T$，$p_3=(1, 1, 0)^T$，求 A^n.

8. (20 分) 设对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 满足 $|A+3E|=0$，其中 E 为单位矩阵.

(1) 求 a; (2) 求 A 的所有特征值与对应的特征向量; (3) 求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

9. (20 分) 设 A 为 n 阶方阵, 求证: $A^2=A$ 的充分必要条件是: $R(A)+R(A-E)=n$，其中 $R(A)$为矩阵 A 的秩.