中 山 大 学

2016年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：663

科目名称：数学分析

考试时间：2015年12月 27日上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

一.解答下面各题（本题共56分，每小题8分）

1.求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin(x)}\right]\dfrac{1}{\sin(x)}$.

2.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

3.设 $y=x^2\cos 3x$，求 $y^{(50)}(x)$.

4. 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$, $0\le x\le\dfrac{1}{2}$，的弧长.

5.计算 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$.

6.求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2-1}{2^n}x^n$ 的收敛区间与和函数.

7.设 $f(r)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调递减连续函数，定义

$$F(t)=\frac{3}{4\pi t^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz\ ,\ t\in(0,1]$$

求 $F(t)$ 在 $(0,1]$ 中的最小值.

二.(10分)证明：(i) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

(ii) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $[-1,1]$ 上不一致收敛.

三.(10分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $f''(x)\le 0$.证明：$\int_0^1 f(x)dx\le f(\frac{1}{2})$.

四.(10分)函数 $f(x)=x^{\frac{1}{8}}\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 上是否一致连续？试说明理由.

五.(10分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且导函数连续，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$.

六.(10 分)设 D 是两条直线 $y=x, y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1, xy=4$ 所围成的区域，$F(u)$ 是具有连续导数的一元函数，记 $f(u)=F'(u)$，证明：$\oint\limits_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\int_1^4 f(u)du\cdot\ln 2$，

其中 ∂D 表示 D 的边界，∂D 的方向为逆时针方向.

七.（10 分），函数 $f(x,y)=\begin{cases}(1-\cos\frac{x^2}{y})\sqrt{x^2+y^2}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微吗？证明你的结论.

八.(10 分)设 $x_0=1, x_{n+1}=\frac{3+2x_n}{3+x_n}, n\geq 0$. 证明：序列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限。

九.（10 分）求第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} zdS$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被平面 $z=1$ 截出的顶部.

十.（8 分）一点 A 位于半径为 a 的圆内，它到圆心的距离为 b,试计算从 A 向圆的所有切线作垂线，其垂足的轨迹所包围的面积.

十一.（6 分）如果存在数列 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限点.

设数列 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，证明：当 $\{x_n\}$ 不收敛时其极限点集为有界闭区间.