中 山 大 学

2016 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：868

科目名称：高等代数

考试时间：2015 年 12 月 27 日 下午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

符号说明：试卷中 Q, R, C 分别表示有理数域，实数域和复数域； F 表示一般数域.

1. （20 分）设 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1,\quad g(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$.

（1）求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首一最大公因式 (f,g)，并求 $u(x),v(x)$ 使 $uf+vg=(f,g)$；

（2）把 $g(x)$ 分别在数域 C，R 及 Q 上分解为不可约因式的乘积.

2. （20 分）设 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

3. （20 分）设 $A=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\-a&0&h&-g\\-b&-h&0&f\\-c&g&-f&0\end{pmatrix}\in M_4(R)$.

（1）计算 A 的行列式 $\det A$；

（2）设 $\lambda\in R$，证明：线性方程组 $(\lambda I+A)X=0$ 有解的充分必要条件是 $\lambda=af+bg+ch=0$.

4. (10 分) 设 $A\in M_n(F),\alpha,\beta\in \mathrm{F}^{n\times 1}$. 证明: $\det\left(A+\alpha\beta^T\right)=\det A+\beta^T adj(A)\alpha$，这里 $adj(A)$ 表示矩阵 A 的伴随矩阵.

5. (10 分) 设 $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\7&1&2\end{pmatrix}$，求 A 的 Jordan 标准形和最小多项式.

6. (10 分) 设 $A\in M_n(F)$ 在 F 上有 n 个不同的特征值，令 $W=\left\{B\in M_n(F)\,|\,AB=BA\right\}$. 求 $\dim W$.

7.（10 分）设线性映射 $\varphi: M_n(F) \to M_k(F)$ 满足：$\forall A,B \in M_n(F), \varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$ 及 $\varphi(I_n)=I_k$. 证明：若 λ 是 $\varphi(A)$ 的特征值，则 λ 也是 A 的特征值.

8.（10 分）设 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的投影变换,即 $\sigma^2=\sigma$. 证明： 若 $\forall \alpha \in V, |\sigma(\alpha)| \le |\alpha|$，则 $\ker\sigma \perp \operatorname{Im}\sigma$.

9.（20 分）记 $V=M_n(R), U=\{A\in V \mid A^T=A\}, W=\{B\in V \mid B^T=-B\}$. 在 V 上定义二元函数 $f: V\times V \to R$， $f(A,B)=tr(AB^T), \forall A,B\in V$.

（1）证明：(V,f) 是欧氏空间；

（2）证明：$U\perp W$，$V=U\oplus W$；

（3）设 $A\in V$，试求 $B\in U$ 使 A 与 B 的距离最短，即 $\forall D\in U$，有 $d(A,B)\le d(A,D)$.

10. （20 分）我们称一个 n 阶复方阵 A 为半正定的，如果 $\forall X\in C^n, X^*AX\ge 0$；称一个线性映射 $\varphi: M_n(C)\to M_k(C)$ 为非负的，若 A 半正定可推出 $\varphi(A)$ 半正定. 证明：

(1) 若 A 半正定，则 $A^*=A$，且 A 的特征值为非负实数;

(2) 若 $\varphi: M_n(C)\to M_k(C)$ 为非负的，则 $\forall A\in M_n(C), \varphi(A^*)=\varphi(A)^*$.

注：若 A 为复矩阵，A^* 表示 A 的共轭转置，即 A^* 的 (i,j) 元等于 A 的 (j,i) 元的共轭.