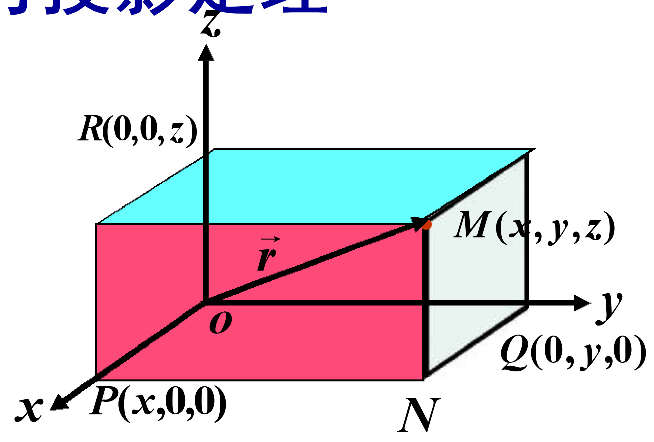
§1.6　向量在轴上的投影与投影定理

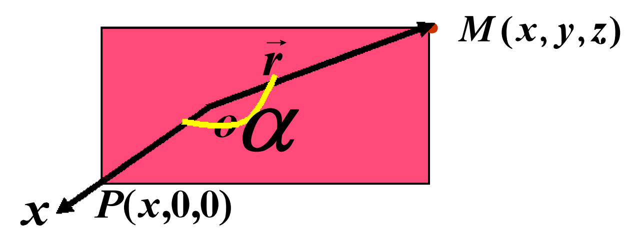


由前面分析知，

$\vec{r}$ 在三个坐标轴上的**分向量**：

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OR}=z\vec{k}.$$

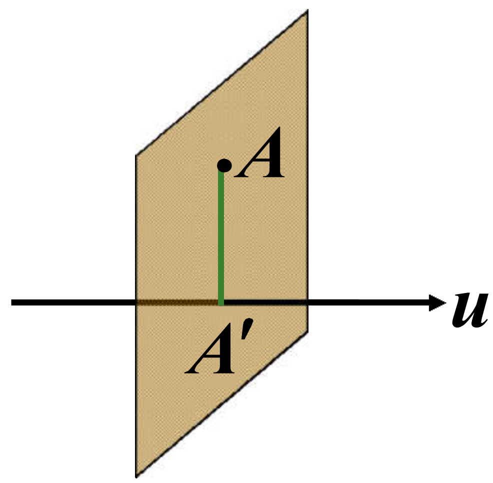
只考虑 $\vec{r}$ 与 x 轴的关系，有



$\vec{r}$在x轴上的分向量 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$，

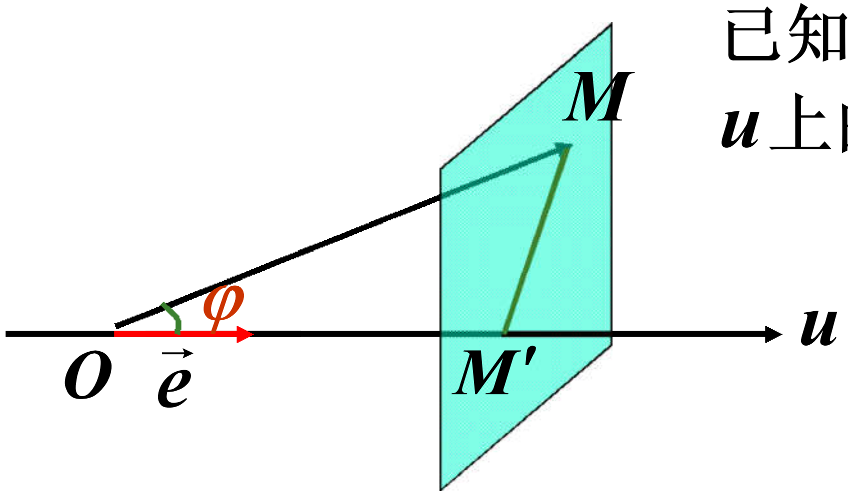
且 $x=|\vec{r}|\cos\alpha$.

• 空间一点在轴上的投影



过点 A 作轴 u 的垂直平面，交点 A' 即为点 A 在轴 u 上的投影.

•空间一向量在轴上的投影



已知向量的起点 O, 终点 M 在轴 u 上的投影为 M',

则向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$在$u$轴上的分向量.

设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\vec{e}$, 则称$\lambda$为 向量 $\vec{r}$ 在轴 u 上的投影.

记为 $\mathrm{Prj}_u\vec{r}$ 或 $(\vec{r})_u$

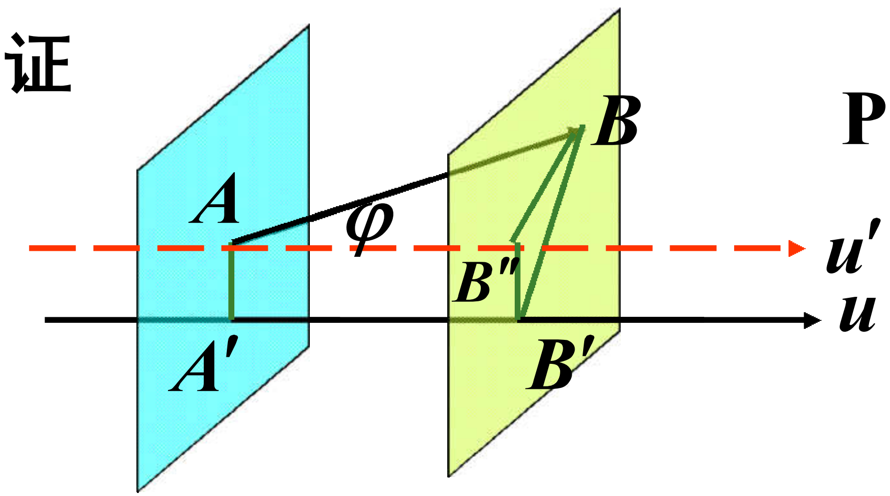
由此定义，设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，则

$a_x=\mathrm{Pr}\,j_x\vec{a}$， $a_y=\mathrm{Pr}\,j_y\vec{a}$， $a_z=\mathrm{Pr}\,j_z\vec{a}$.

关于向量的投影定理（1）

向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦： $\mathrm{Pr}\,j_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$

证



$$\mathrm{Pr}\,j_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Pr}\,j_{u'}\overrightarrow{AB}$$

$$=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$$

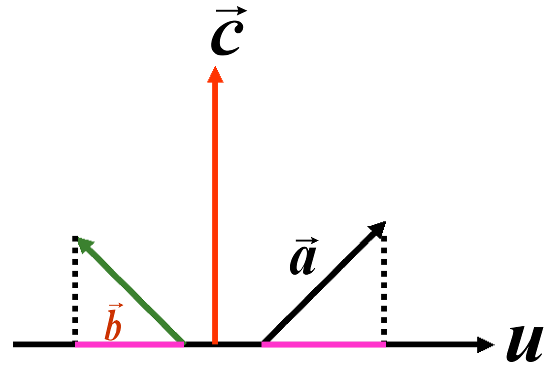
$$\Pr j_u AB = |\boldsymbol{AB}|\cos\varphi$$

定理1的说明：

(1) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$，投影为正；

(2) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$，投影为负；

(3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$，投影为零；

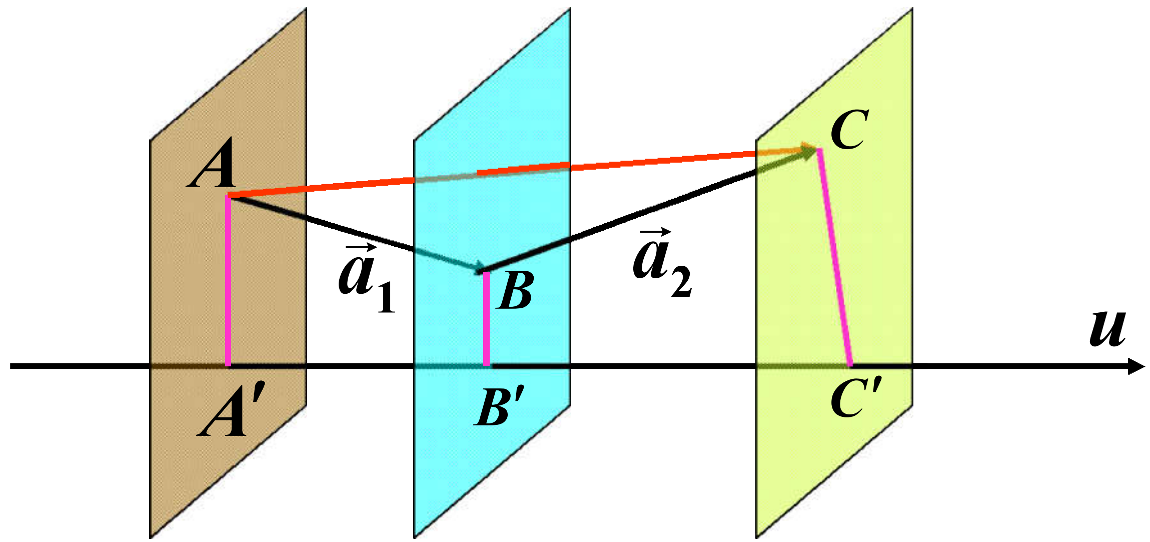


(4) 相等向量在同一轴上投影相等；

关于向量的投影定理（2）

两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和．（可推广到有限多个）

$$\mathrm{Pr}\, j(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\mathrm{Pr}\, j\vec{a}_1+\mathrm{Pr}\, j\vec{a}_2.$$



关于向量的投影定理（3）

$$\mathbf{Pr}\, j_u\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\,\mathbf{Pr}\, j_u\vec{a}$$

例 1 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$，$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $\because \vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})$$

$$-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k},$$

$\therefore$ 在 x 轴上的投影为 $a_x=13$,

在 y 轴上的分向量为 $7\vec{j}$.

小节：

点在轴上的投影

向量在轴上的投影

向量的投影定理

作业：

P37：第1题