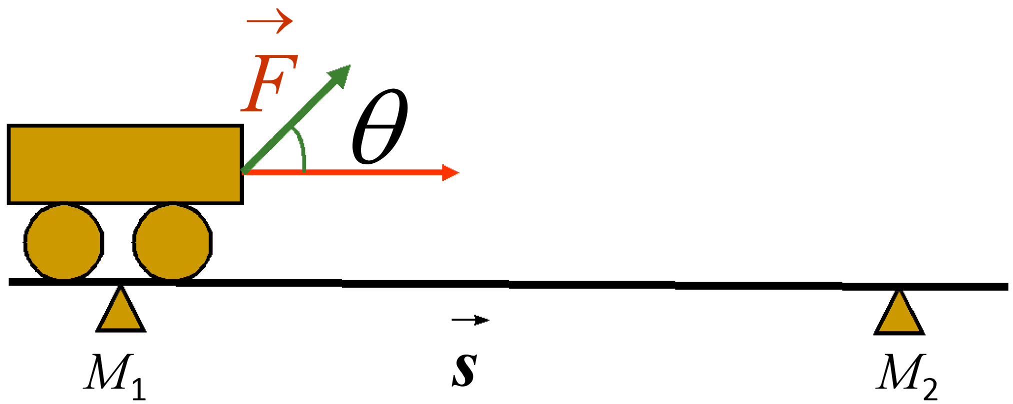
§1.7　两向量的数量积

一、实例

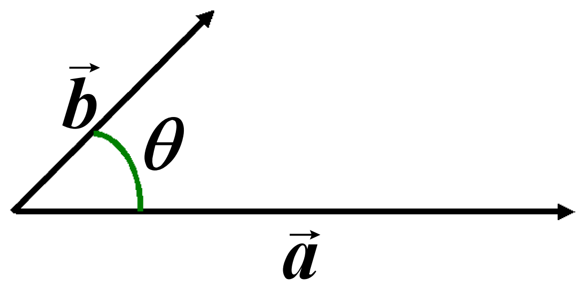


一物体在常力$\vec{F}$作用下沿直线从点M_1移动到点M_2，以$\vec{s}$表示位移，则力$\vec{F}$所作的功为

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta \quad (\text{其中}\theta\text{为}\vec{F}\text{与}\vec{s}\text{的夹角})$$

启示 两向量作这样的运算，结果是一个数量.

二、定义　向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**记为$\vec{a}\cdot\vec{b}$



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

(其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角)

$\because\ |\vec{b}|\cos\theta=\mathrm{Pr}\,j_a\vec{b},\quad |\vec{a}|\cos\theta=\mathrm{Pr}\,j_b\vec{a},$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\mathrm{Pr}\,j_b\vec{a}=|\vec{a}|\mathrm{Pr}\,j_a\vec{b}.$

结论　两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

数量积也称为“**点积**”、“**内积**”.

三、数量积的性质：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

证 $\because \theta=0,\quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}.\quad (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

证 $(\Rightarrow)$ $\because \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ |\vec{a}|\neq 0,\ |\vec{b}|\neq 0,$

$\therefore \cos\theta=0,\quad \theta=\frac{\pi}{2},\quad \therefore \vec{a}\perp\vec{b}.$

$(\Leftarrow)$ $\because \vec{a}\perp\vec{b},\quad \therefore \theta=\frac{\pi}{2},\quad \therefore \cos\theta=0,$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0.$

四、数量积符合下列运算规律：

（1）交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

（2）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

（3）若 λ为数： $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

若 λ、μ为数：$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

五、数量积的坐标表达式

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$\because \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}, \quad \therefore \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0,$$

$$\because |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$$

$$\therefore \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

六、两向量夹角余弦的坐标表示式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

由此可知两向量垂直的充要条件为：

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

例1 已知 $\vec{a}=\{1,1,-4\}$，$\vec{b}=\{1,-2,2\}$，

求（1）$\vec{a}\times\vec{b}$；（2）$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角；

（3）$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影.

解

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\operatorname{Pr}j_b\vec{a}$ $\quad\therefore \operatorname{Pr}j_b\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-3.$

例 2 证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证

$$[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$$

$$=[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=(\vec{c}\cdot\vec{b})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=0$$

$$\therefore [(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$$

小节：

数量积的定义

数量积的性质

数量积的坐标表达

两向量的夹角

作业：

P46：第1（3）、3（4）、5题