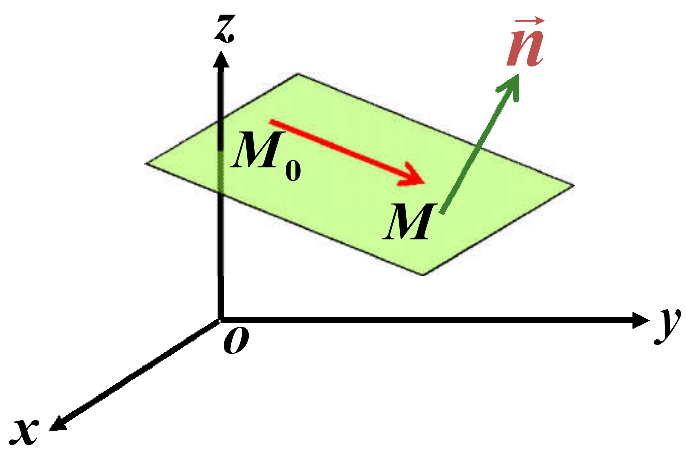
第三章　平面与空间直线

§ 3.1　平面的方程

一、平面的点法式方程



如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法线向量．

法线向量的特征：　垂直于平面内的任一向量．

已知　$\vec{n}=\{A, B, C\}$，　$M_0(x_0, y_0, z_0)$，

设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$

必有 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$$

$$\because\quad \overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$$

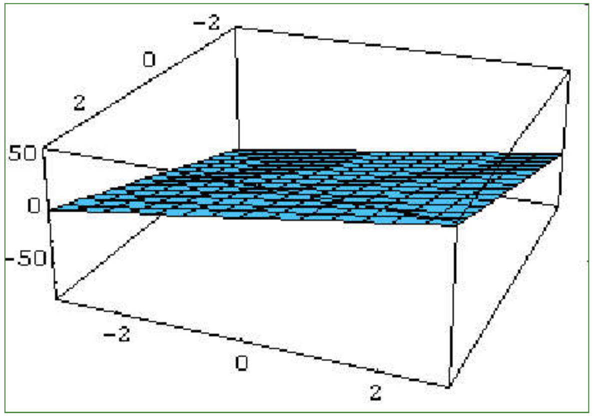
$$\therefore\quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

-----平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$, 已知点 (x_0, y_0, z_0).

平面上的点都满足上方程，不在平面上的点都不满足上方程，上面方程称为平面的方程，平面称为方程的图形.

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.



解 $\overrightarrow{AB} = \{-3, 4, -6\}$

$\overrightarrow{AC} = \{-2, 3, -1\}$

取 $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \{14, 9, -1\}$,

所求平面方程为 $14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$,

即： $14x + 9y - z - 15 = 0.$

小结：过不在一直线上三点的平面方程

二、平面的三点式方程：

平面上不共线的三点 $\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{i}=1,2,3,$ $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$为平面上任一点.则过这三点的方程为：

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$$

$$=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

也即：

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解 $\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$, $\vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{10,15,5\}$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

即： $2x+3y+z-6=0.$

三、平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{=D}=0$$

即 任一平面 $\underset{?}{\overset{\text{表示}}{\rightleftarrows}}$ $Ax+By+Cz+D=0$

（A,B,C不同时为零）

不妨设 $A\neq 0$，则

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)+B(y-0)+C(z-0)=0$$ ，为一平面.

$Ax+By+Cz+D=0$ ------平面的一般方程

$Ax + By + Cz + D = 0$ 平面的一般方程

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D = 0$, 平面通过坐标原点；

(2) $A = 0$, $\begin{cases} D = 0, & \text{平面通过 } x \text{ 轴；} \\ D \neq 0, & \text{平面平行于 } x \text{ 轴；} \end{cases}$

类似地可讨论 $B = 0$, $C = 0$ 情形.

(3) $A = B = 0$, 平面平行于 xoy 坐标面；

类似地可讨论 $A = C = 0$, $B = C = 0$ 情形.

(4) $A = B = D = 0$, 有 $z = 0$, 即 xoy 面.

例 3 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知 $D=0$,

由平面过点$(6,-3,2)$知 $\boxed{6A-3B+2C=0}$

$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\}$, $\therefore \boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

四、平面的截距式方程

例 4 设平面与 x, y, z 三轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

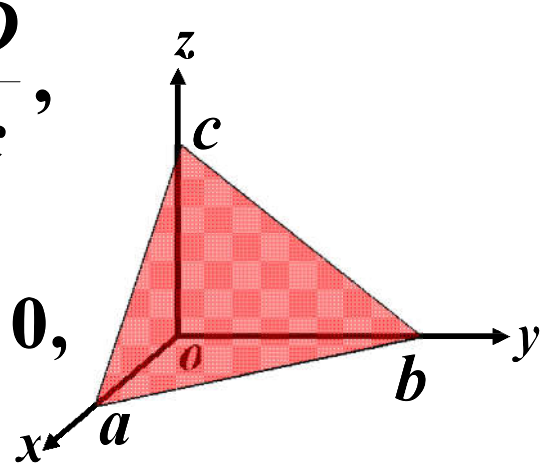
解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

将$A=-\dfrac{D}{a}$，$B=-\dfrac{D}{b}$，$C=-\dfrac{D}{c}$，

代入所设方程$Ax+By+Cz+D=0$，

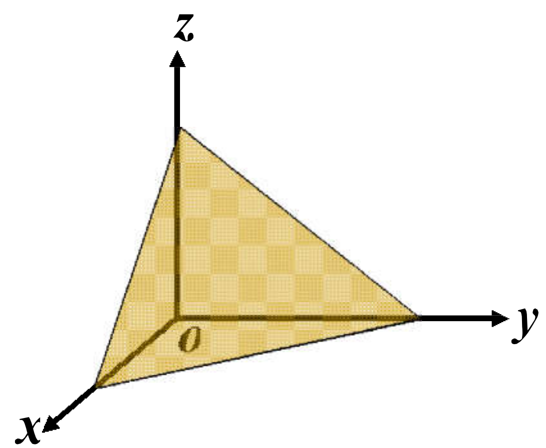


$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ ……平面的截距式方程

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距

例 5 求平行于平面$6x + y + 6z + 5 = 0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,$



$\because V = 1, \quad \therefore \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}|abc| = 1,$

由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件）$\dfrac{1/a}{6} = \dfrac{1/b}{1} = \dfrac{1/c}{6},$

化简得 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}$，令 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}=t$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{6t},\quad b=\dfrac{1}{t},\quad c=\dfrac{1}{6t},$ 代入体积式

$\therefore 1=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\dfrac{1}{6t}\cdot\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{1}{6t}\right| \Rightarrow t=\pm\dfrac{1}{6},$

$\therefore a=\pm 1,\quad b=\pm 6,\quad c=\pm 1,$ 因所设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$

所求平面方程为 $6x+y+6z=6.$

或 $6x+y+6z=-6.$

五、平面的点位式方程

例5　已知平面p上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$与两个平行于p的不共线向量$\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$，$\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$，求平面p的方程.

解：　$\because \vec{a}$与$\vec{b}$不共线且都平行于平面　π

$\therefore \vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$可作为平面　π的法向量

设平面上任一点$M(x,y,z)$，则：　$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

即　　$\left(\overrightarrow{M_0M},\vec{a},\vec{b}\right)=0$

也即：$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0$

$\vec{a}$与$\vec{b}$叫做方位向量

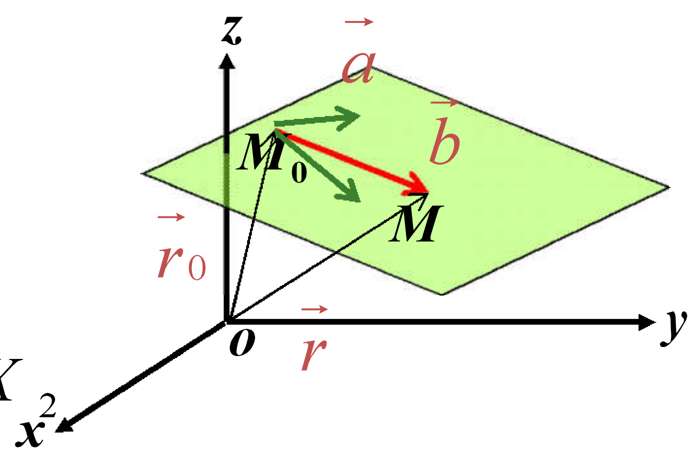
六、平面的向量式参数方程

由于$\vec{a},\vec{b}$不共线，所以三向量共面的条件也可写成：

$$\overrightarrow{\mathbf{M_0M}} = u\vec{a} + v\vec{b} \quad 即\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$$

称其为平面的向量式参数方程

即：
$$\begin{cases} x - x_0 = uX_1 + vX_2 \\ y - y_0 = uY_1 + vY_2 \\ z - z_0 = uZ_1 + vZ_2 \end{cases}$$

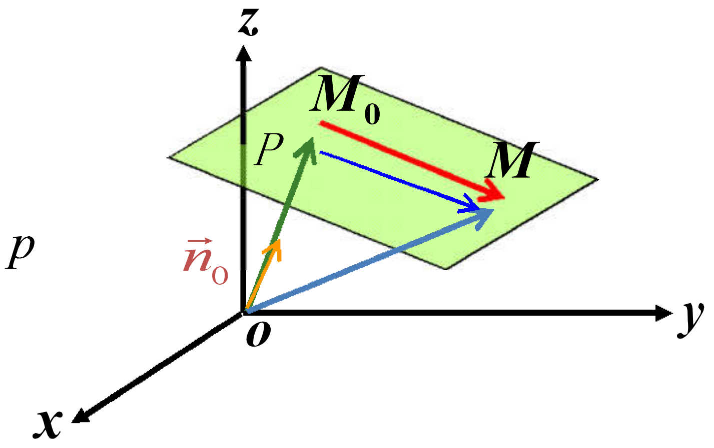


七、平面的坐标式参数方程

也即：
$$\begin{cases} x = x_0 + uX_1 + vX_2 \\ y = y_0 + uY_1 + vY_2 \\ z = z_0 + uZ_1 + vZ_2 \end{cases}$$

称其为平面的坐标式参数方程，u,v为参数

八、平面的法式方程



设平面上一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

平面的单位法向量 $\vec{n}^0$ ， 令 $|OM_0| = p$

则 $\vec{n}^0(\vec{r} - p\vec{n}^0) = 0$

即： $\vec{n}^0 \cdot \vec{r} - p = 0$

…称为平面的向量式法式方程

设 $\vec{r} = \{x, y, z\}, \vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

则： $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$

…称为平面的坐标式法式方程，简称法式方程

对于一般方程Ax+By+Cz+D=0

取 $\lambda = \dfrac{1}{\pm|\vec{n}|} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$， 并使$\lambda D = -p \le 0$，p为原点到此平面的距离

则可将平面的一般方程法式化，λ 称为法式化因子

例7. 把平面方程 $3x-2y+6z+14=0$ 化为法式方程，求自原点指向平面的单位法向量及其方向余弦，并求原点到平面的距离.

小节：

平面的点法式方程
平面的一般方程
平面的三点式方程
平面的参数式方程
平面的点位式方程
平面的法式方程

作业：

P104：2，5（3），6（4），7（2）